

王季雨,孙鸿博,梁霄,等. 2025. 有限均质椭球体模型重力及梯度异常正演计算方法研究[J]. 地震研究, 48(4): 602–611, doi: 10.20015/j.cnki.ISSN1000-0666.2025.0061.

Wang J Y, Sun H B, Liang X, et al. 2025. Research on forward calculation method of gravity and gradient anomalies of finite homogeneous ellipsoid model[J]. *Journal of Seismological Research*, 48(4): 602–611, doi: 10.20015/j.cnki.ISSN1000-0666.2025.0061.

有限均质椭球体模型重力及梯度异常 正演计算方法研究*

王季雨^{1,2,3}, 孙鸿博^{1,2,3}, 梁霄^{1,2,3}✉, 倪红玉^{1,2,3}, 黄显良^{1,2,3}, 李文尧⁴, 韩润生⁴

(1. 安徽省地震局, 安徽 合肥 230001; 2. 安徽省庐庐一大别地球物理研究中心, 安徽 合肥 230001;

3. 安徽蒙城地球物理国家野外科学观测研究站, 安徽 蒙城 233500; 4. 昆明理工大学

有色金属矿产地质调查中心西南地质调查所, 云南 昆明 650093)

摘要: 在有限均质椭球体的特殊情况——球体、旋转椭球体模型的基础上, 推出了更具普适性的三轴不等长椭球体模型的重力异常 V_z 及其重力梯度 V_{xx} 、 V_{yy} 、 V_{zz} 、 V_{xy} 、 V_{yz} 、 V_{zx} 的积分计算公式, 并用 Matlab 开发工具编制了计算程序, 获得了相应的计算数据并绘出了各分量的重力异常剖面图与等值线图, 通过与已公开的球体、旋转椭球体模型的典型算例进行比对, 验证了公式的正确性。结果表明: 三轴不等长椭球体与球体、旋转椭球体虽具有相似的重力异常变化规律, 但数值特征受形态参数影响显著, 验证了三轴不等长椭球体模型在表征复杂地质体时的合理性与优越性, 其既继承了球状体的基本场特征, 又能通过三轴差异精确刻画实际地质体体积、质量分布等关键参数引起的重力异常场细节变化。

关键词: 椭球体模型; 重力异常; 正演; 计算方法

中图分类号: P315.726

文献标识码: A

文章编号: 1000-0666(2025)04-0602-10

doi:10.20015/j.cnki.ISSN1000-0666.2025.0061

0 引言

地质勘探领域所采用的地球物理方法涵盖了重力、电法、磁法、地震、放射性以及地热勘探等多种技术手段(曾华霖, 1999, 2005)。相较于其他方法, 重力勘探展现出对电磁干扰“免疫”的独特优势, 当目标矿体与围岩间存在明显密度差时, 其勘探效果尤为显著(孙文珂, 2017)。在地质勘探过程中, 人们通常利用重力勘探仪器来捕捉地质体所产生的剩余重力异常信息, 然后依

据正演模拟理论框架, 结合地质构造学原理, 对这些异常数据进行深度剖析与解释, 旨在精确描绘地质体的几何形态与密度分布特性(乔中坤等, 2023; 刘金钊等, 2023)。在此基础上, 运用反演技术, 进一步确定地质体结构的埋藏深度, 为后续的钻探作业、矿床储量及地下空间形态的预测提供有力依据, 从而提升地质勘探的精确性和有效性(张赤军等, 2007; 胡双贵等, 2024)。

在地球物理勘探与大地重力测量技术等领域的正反演计算工作中, 为了简化研究对象, 一般采用对任意形状的三维地质体进行分割的方法,

* 收稿日期: 2024-10-25.

基金项目: 安徽蒙城地球物理国家野外科学观测研究站联合开放基金项目(MENGO-202410); 安徽省科技创新攻坚计划项目(202423110050030).

第一作者简介: 王季雨(1994-), 工程师, 主要从事重力正反演方法研究. E-mail: 503527782@qq.com.

✉通信作者简介: 梁霄(1991-), 工程师, 主要从事流动重力、流动地磁、跨断层水准观测与数据处理及分析工作. E-mail: lx1068@126.com.

将复杂三维地质体计算转化为一系列简单常用的规则几何体模型（如长方体、圆柱体、球与椭球体等）的迭加（Goodacre, 1973; Li, Chouteau, 1998; Nagy *et al*, 1996, 2000; Mehanee, 2014）。骆遥（2008），李静等（2023）对长方体正演计算解析公式及其计算方法进行过介绍；边少锋等（2024）对矩棱柱和多个矩棱柱单元组成的复杂地质体梯度张量进行正演计算；冷洁和邱峰（2022）、詹毅（2023）对圆柱体正演相关解析式及其计算进行过介绍；而对于椭球体特定情况的球体（张剑等，2007）与旋转椭球体（刘繁明等，2016）的正演计算解析公式也已有相关研究，而更一般情形的椭球体正演计算解析公式及其计算方法的相关研究成果尚未见报道。三轴不等长椭球体在实际野外地质情况中可以指代很多种不同形态矿体模型，空穴或类椭球体地质形体，很有研究意义。基于此，本文根据引力位计算公式推导出三轴不等长椭球体模型的重力异常 V_z 及其重力梯度 V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{zz} 、 V_{zzz} 正演计算解析公式，使用 Matlab 开发工具编制了相应的计算程序，并与公开的典型算例及刘繁明等（2016）的研究结果进行对比。

1 椭球体重力异常公式推导

虽然三轴不等长椭球体（以下简称“椭球体”）在几何形态上被视为一种更为普遍而又相对简单的形体，但在计算其引力位时却与旋转椭球体、球体、圆柱体以及矩形棱柱体等传统的规则形体有着显著的差异。为此，采用的计算策略是：首先，借助直接积分法求解椭球体内部任意点处的引力位；然后依据椭球体引力场的特征和麦克劳林定理，将这一内部引力位问题转化为外部引力位问题（刘繁明等，2016）；最后通过对引力位在 x 、 y 、 z 3 个方向上求一、二、三阶偏导数。鉴于椭球体的重力与重力梯度异常表达式比旋转椭球体、球体的推导更加复杂与困难，本文充分发挥编程优势，仅利用椭球体在外部空间任意点

$P(x, y, z)$ 所引发的重力异常（ Δg 即 V_z ）、重力梯度异常（ V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{zz} ）以及重力垂向三阶导数（ V_{zzz} ）二重积分计算式就可计算出各阶异常值，不仅降低了数学推导的复杂度，也使结果应用更具普遍性。值得注意的是，与多边形棱柱体在棱边延伸区域易产生场值奇异性不同，椭球体因其光滑闭合的几何特性，在计算引力位时无需考虑畸点所带来的复杂影响。

根据上述计算策略建立椭球体模型，如图 1 所示。设 xoy 平面为观测平面， z 轴正方向朝下，椭球体位于 x 、 y 、 z 方向的半轴长分别为 a 、 b 、 c ，密度均匀分布的椭球体中心位于坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 。椭球体模型为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

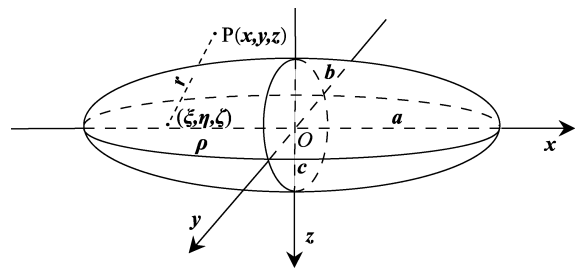


图 1 中心位于原点的椭球体模型

Fig. 1 Ellipsoid model with the center at the origin

若椭球体剩余密度为 ρ ， (ξ, η, ζ) 为椭球体内任意一点，该点处体积元为 $dv = d\xi d\eta d\zeta$ 。根据万有引力公式，在椭球体外部空间任意点 $P(x, y, z)$ 处的重力异常表达式为：

$$\Delta g = \frac{\partial V}{\partial z} = V_z = G\rho \iiint_v \frac{(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

式中： G 为万有引力常量 $6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 。

由式（2）分别对 x 、 y 求一阶偏导数，对 z 求一阶偏导数和二阶偏导数，得到：

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial z} = V_{zz} = G\rho \iiint_v \frac{2(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial x} = V_{xz} = 3G\rho \iiint_v \frac{(\zeta - z)(\xi - x)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial y} = V_{yz} = 3G\rho \iiint_v \frac{(\zeta - z)(\eta - y)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} = V_{zzz} = G\rho \iiint_v \frac{(\zeta - z)[6(\zeta - z)^2 - 9(\xi - x)^2 - 9(\eta - y)^2]}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{7}{2}}} d\xi d\eta d\zeta \quad (6)$$

考虑到用式 (2) ~ (6) 求积分的解析解比较困难, 本文采用数值积分方法求其数值解。

由式 (1) 可得:

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (7)$$

由于 (ξ, η, ζ) 为椭球体内任意一点, 故 $|\zeta| \leq |z|$, 从而可得:

$$\zeta \in \left[-c \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}, c \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} \right] \quad (8)$$

为了减少计算量, 提高运行效率, 将三重积

分转化为二重积分, 即对 ζ 积分, 得到关于 ξ, η 的表达式。考虑 ξ, η 在 xoy 平面的取值范围,

此时 $z=0$, 可得: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

进一步得到: $y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

又因点 (ξ, η) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内, 则 $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}$

≤ 1 , 故 $|\eta| \leq |y|$, $|\xi| \leq |x|$, 从而可得:

$$\xi \in [-a, a], \eta \in \left[-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]。$$

有关于 ξ, η 的二重积分表达式如下:

$$V_z = -\rho G \int_{-a}^a \int_{-b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}}^{b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}} \frac{1}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + z \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} d\eta d\xi \quad (9)$$

$$V_{zz} = -\rho G \int_{-a}^a \int_{-b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}}^{b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}} \frac{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\eta d\xi \quad (10)$$

$$V_{xz} = -\rho G \int_{-a}^a \int_{-b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}}^{b \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}} \frac{\xi - x}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\xi - x}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\eta d\xi \quad (11)$$

$$V_{yz} = -\rho G \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}} \frac{\eta - y}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta - y}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\eta d\xi \quad (12)$$

$$V_{zz} = \rho G \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}} \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - 2 \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z \right)^2}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - z \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - 2 \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + z \right)^2}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + z \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\eta d\xi \quad (13)$$

为了进行数值积分, 需要把上下限转化为定值, 从而得到:
值, 做圆上的极坐标变换, 可得:

$$\begin{cases} \xi = a \cos \theta \\ \eta = b \sin \theta \end{cases} \quad (14)$$

这个变换的 Jacobi 行列式为:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ b \sin \theta & b \cos \theta \end{vmatrix} = abr \quad (15)$$

$$d\eta d\xi = ab r dr d\theta \quad (16)$$

由于 $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \leq 1$, 则 $r^2 \leq 1$, 即 $r \in [0, 1]$, θ 是点 (ξ, η) 与坐标原点的连线与 x 轴正向的夹角, 可取 $[0, 2\pi]$ 。

对式 (9) ~ (13) 二重积分式中的 ξ, η 进行替换, 则公式可分别变为:

$$V_z = -abG\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} - z]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} + z]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} d\theta dr \quad (17)$$

$$V_{xz} = -abG\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r(\arccos \theta - x)}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} - z]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{r(\arccos \theta - x)}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} + z]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} d\theta dr \quad (18)$$

$$V_{yz} = -abG\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r(b \sin \theta - y)}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} - z]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{r(b \sin \theta - y)}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} + z]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} d\theta dr \quad (19)$$

$$V_{zz} = -abG\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r[c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} - z]^2}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} - z]^2 \right\}^{\frac{5}{2}}} - \frac{r[c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} + z]^2}{\left\{ (\arccos \theta - x)^2 + (b \sin \theta - y)^2 + [c(1 - r^2)^{\frac{1}{2}} + z]^2 \right\}^{\frac{5}{2}}} d\theta dr$$

$$\frac{r[c(1-r^2)^{\frac{1}{2}}+z]^2}{\{(\arccos\theta-x)^2+(b\sin\theta-y)^2+[c(1-r^2)^{\frac{1}{2}}+z]^2\}^{\frac{3}{2}}}d\theta dr \quad (20)$$

$$V_{zz} = abG\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \frac{\{(\arccos\theta-x)^2+(b\sin\theta-y)^2-2[c(1-r^2)^{\frac{1}{2}}-z]^2\}}{\{(\arccos\theta-x)^2+(b\sin\theta-y)^2+[c(1-r^2)^{\frac{1}{2}}-z]^2\}^{\frac{5}{2}}} - \frac{r\{(\arccos\theta-x)^2+(b\sin\theta-y)^2-2[c(1-r^2)^{\frac{1}{2}}+z]^2\}}{\{(\arccos\theta-x)^2+(b\sin\theta-y)^2+[c(1-r^2)^{\frac{1}{2}}+z]^2\}^{\frac{5}{2}}} d\theta dr \quad (21)$$

当椭球体中心位于 (x_0, y_0, h) , 且半轴 a 、 b 、 c 分别平行于 x 、 y 、 z 轴时, 只需进行坐标平移, 即用 $(x-x_0, y-y_0, z-h)$ 代入式 (17) ~ (21) 进行计算。

当椭球体中心位于 (x_0, y_0, h) , 但半轴 a 、 b 、 c 不平行于 x 、 y 、 z 轴时, 除需进行坐标平移外, 还需进行坐标旋转变换。假定 a 半轴与 xoz 平面夹角为 α , 与 xoy 平面夹角为 β , 且 $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ 时, 则可推导出变换前后的坐标关系为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-h \end{bmatrix} \quad (22)$$

进而可用式 (22) 中的 x' 、 y' 、 z' 代入式 (17) ~ (21) 进行计算。

2 程序设计与公式的正确性检验

基于上述理论与公式, 可用 Matlab 中的二重积分函数 `integral2` 进行求解, 调用格式为: `integral2(f,0,1,0,2*pi,'AbsTol',err)`, 其中 f 为式 (17) ~ (21) 对应的函数句柄, `AbsTol` 为绝对误差容忍度, `err` 值经计算调试设为 0.01 较合适。从而得到 V_z 、 V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{zz} 、 V_{zzz} 重力异常值。本文得出的重力异常公式计算简单, 易编程实现, 避免了使用三重积分计算重力异常值的复杂性。程序设计思路与操作流程如图 2 所示。

该重力异常正演包含了均质椭球体模型在垂直、倾斜等多视角与位置的情况, 具有模型参数设置、观察参数的选择与设置、计算结果 (V_z 、 V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{zz} 、 V_{zzz}) 的存储位置选择与显示、剖面选择与图形绘制、异常平面图类型的选择与绘

制及模型的直观展示等部分。

利用本程序在 xoy 观测平面所得计算结果与刘繁明等 (2016) 的研究结果进行数值比对。从表 1 可以看出两者结果基本一致, 证明了本文正演计算解析公式的正确性。

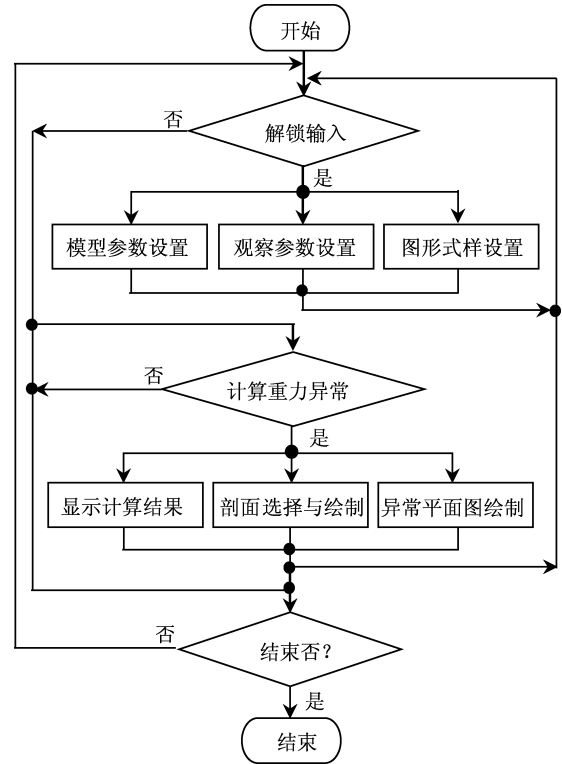


图 2 正演计算操作流程

Fig. 2 Operation flow of forward calculation

3 椭球体重力异常剖面图与等值线图

依据本文正演计算解析公式, 给出三轴等长椭球体 (球体): $a=120$ m, $b=120$ m, $c=120$ m; 两轴等长椭球体 (旋转椭球体): $a=120$ m, $b=120$ m, $c=60$ m; 三轴不等长椭球体: $a=120$ m, $b=90$ m, $c=60$ m。其中: $h=200$ m, 剩余密度

表1 本文方法与刘黎明等(2016)得出的重力异常各分量极值对比

Tab. 1 Comparison between the calculation results obtained by this method and the extreme value of each component of gravity anomaly obtained by Liu *et al* (2016)

来源	类型	极大值				极小值			
		$V_z/$ ($\times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)	$V_{zz}/$ E	$V_{xz}/$ E	$V_{zzz}/$ ($\times 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)	$V_z/$ ($\times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)	$V_{zz}/$ E	$V_{xz}/$ E	$V_{zzz}/$ ($\times 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)
本文方法	椭球体 I	0.246 4	108.962 8	48.377 1	69.415 7	0.005 7	-2.371 5	-48.377 1	-4.517 1
	椭球体 II	0.228 3	95.944 6	39.569 9	58.650 6	0.005 8	-2.492 7	-39.572 2	-5.288 4
	球体	0.279 4	139.696 2	59.975 1	104.772 1	0.005 6	-2.499 3	-59.975 1	-5.399 8
刘黎明等 (2016)	旋转椭球体 I	0.246 4	108.962 8	48.377 0	69.415 7	0.005 7	-2.370 5	-48.377 0	-4.516 9
	旋转椭球体 II	0.228 3	95.950 0	39.572 1	58.661 3	0.005 8	-2.493 1	-39.572 1	-5.287 7
	球体	0.279 4	139.696 2	59.975 1	104.772 1	0.005 6	-2.499 0	-59.975 1	-5.399 2

注: 椭球体 I: $a=b=32\frac{1}{4}$ m, $c=2\frac{1}{2}$ m; 椭球体 II: $a=4$ m, $b=c=2\frac{1}{2}$ m; 球体: $R=2$ m; $h=4$ m, 剩余密度 $\rho=2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, x 、 y 坐标范围均为 $-10 \sim 10$ m, 网格间距为 0.1 m, $z=0$ m.

$\rho=1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 与 xoy 观察面平行 (x 、 y 坐标范围均为 $-300 \sim 300$ m, 网格间距为 5 m, $z=0$ m) 的椭圆体重力异常计算设置界面, 如图 3 所示。通过计算结果绘出各分量重力异常在 $x=20$ m 处对应的剖面如图 4 所示, 等值线图如图 5 所示。

从图 4 可以看出, V_z 、 V_{zz} 、 V_{zzz} 重力梯度剖面图形状类似, 均为上凸形单峰曲线, 显示为正异常, 异常值关于 $y=0$ 对称, 在 $y=0$ 时为极大值, 并且随 y 趋近于 $\pm \infty$ 异常值趋近于 0; 而 V_{xz} 与此相反, 呈下凹形单峰曲线, 显示为负异常, 异常值关于 $y=0$ 对称, 在 $y=0$ 时为极小值, 并且随

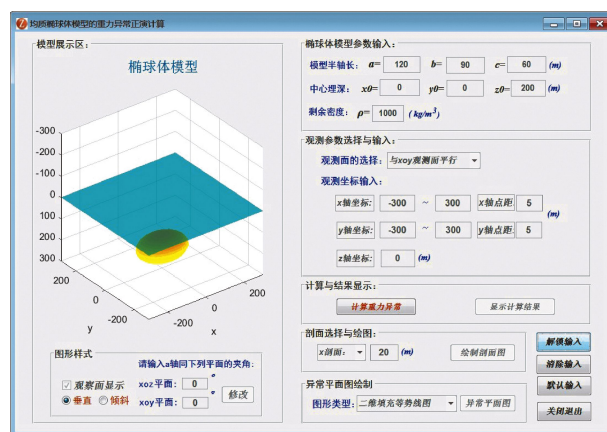
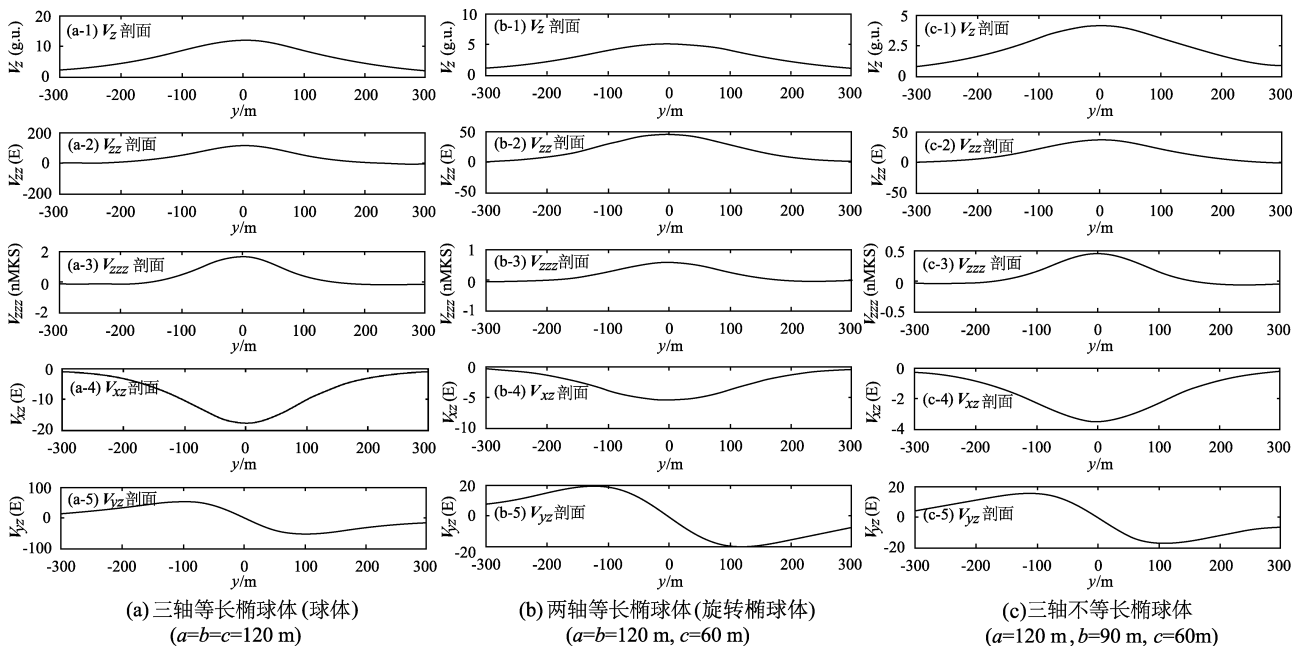


图3 椭球体重力异常计算界面

Fig. 3 Calculation interface of gravity anomaly of ellipsoid

图4 $x=20$ m 处各分量重力梯度异常剖面图Fig. 4 Profile of gravity anomaly when $x=20$ m

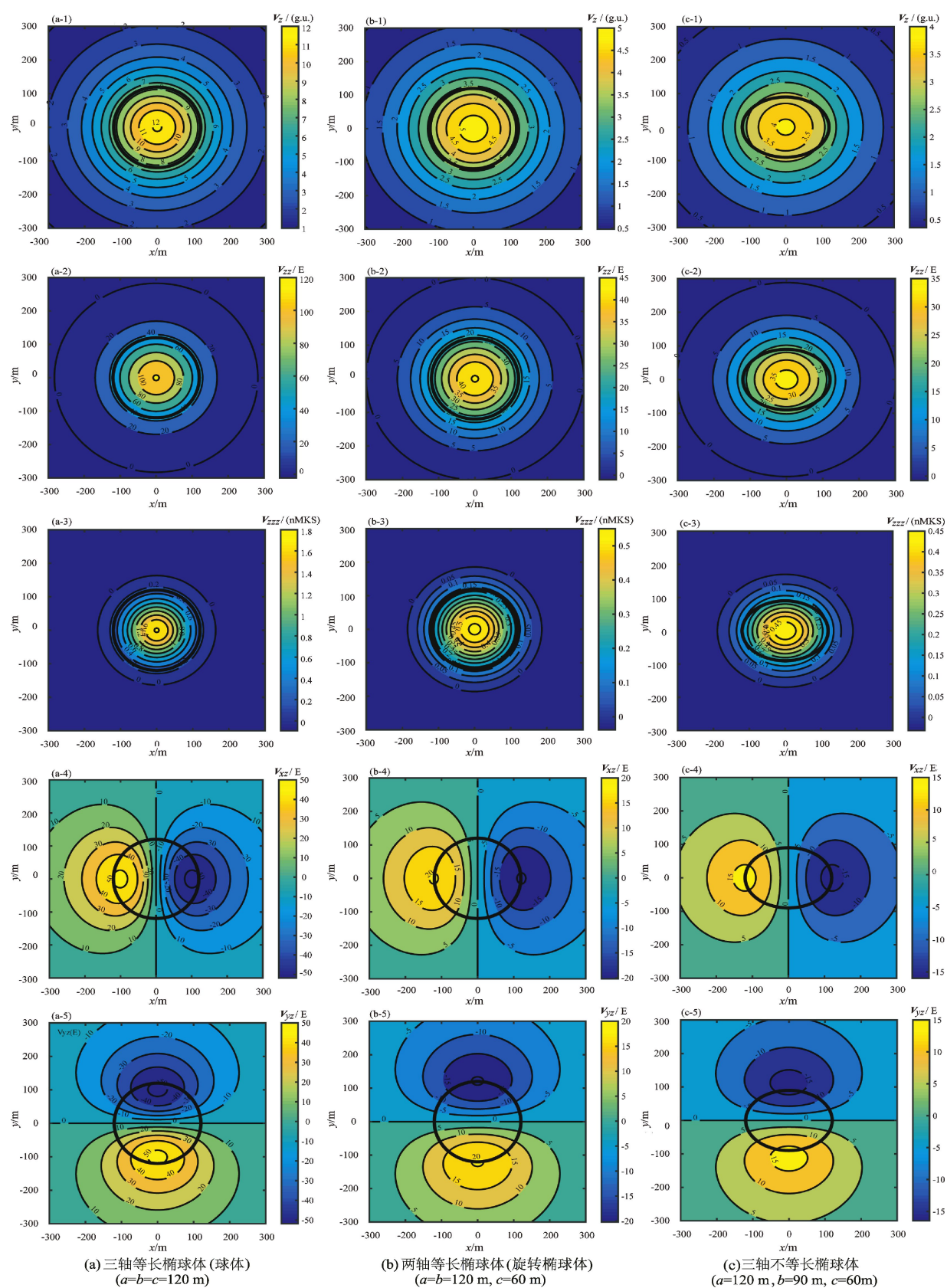


图5 椭球体重力异常等值线图 (图中黑色圆或椭圆代表模型在平面上的投影)

Fig. 5 Isoline diagram gravity anomaly of ellipsoid (black circles or ellipses in the figure represent the projection of the model on the plane)

y 趋近于 $\pm\infty$ 异常值趋近于 0; 但 V_{yz} 剖面表现为以 $y=0$ 为中心对称的高低双峰状态。这也反映了椭球体与球体同属于球状体, 其自身的形状特点决定了它们在重力异常场的分布特征上都存在相同的变化规律。根据这一特点, 可以通过重力异常 V_z 和重力梯度 V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{zz} 、 V_{zzz} 的正负性组合来进一步判断测点在模型上的具体空间位置, 为钻探验证与开发的前期工作提供有力指导。

从图 5 可以看出, 由于旋转椭球体与球体同属于球状体, 因而二者产生的重力异常场的等值线图都存在相同的变化规律, 即中心附近异常等值线较密, 远离中心区域等值线较稀。椭球体自身的形状特点决定了其重力异常 V_z 、重力垂直梯度异常 V_{zz} 和重力垂直三阶导数异常 V_{zzz} 的平面等值线与球体一样, 是一系列同心圆。而 V_{xz} 则表现为以 y 轴为中心对称的双瓣形状, V_{yz} 则表现为以 x 轴为中心对称的双瓣形状。由于球体的质量较为集中, 而旋转椭球体则随着三轴的变化得到了较之分散的质量分布, 使得三者数值及细节特征上具有明显差异, 且这种差异会随着三轴不同带来的体积、质量等因素的不同而不同, 说明在实际地质勘查情况中, 用三轴不等长椭球体指代很多种不同形态矿体模型、洞穴或类椭球型地质形体是合理的。

4 结论

本文在有限均质椭球体特例球体、旋转椭球体模型的基础上, 推出了更具普适性的三轴不等长椭球体模型的 V_z 、 V_{xz} 、 V_{yz} 、 V_{zz} 、 V_{zzz} 的重力异常正演计算积分公式。借助 Matlab 软件计算出重力异常值及重力梯度值, 并与已公开的球体、旋转椭球体的重力异常结果进行比较, 给出了 3 种椭球体各分量的重力异常剖面图与等值线图, 主要结论如下:

(1) 旋转椭球体、椭球体与球体同属于球状体, 其自身的形状特点决定了它们重力异常剖面图的分布特征都存在相同的变化规律。

(2) 旋转椭球体、椭球体与球体产生的重力异常场的等值线图都存在相同的变化规律, 即中心附近异常等值线较密, 远离中心区域等值线较稀。

(3) 三者数值及细节特征上具有明显差异,

且这种差异会随着三轴不同带来的体积、质量等因素的不同而不同, 说明在实际地质勘查情况中, 用三轴不等长椭球体指代多种不同形态矿体模型、洞穴或类椭球型地质形体是合理的。

考虑到工程中的实际应用与篇幅, 本文没有给出 V_x 、 V_y 、 V_{xx} 、 V_{yy} 、 V_{xy} 分量的推导公式及其计算。对于倾斜椭球体的计算方法及其算法, 因为与刘繁明等研究进行对比, 没有给出具体计算数据。另外, 本文是基于有限均质这一前提开展研究的, 对变密度或视密度的问题也是进一步研究的方向。

参考文献:

- 边少锋, 李兆权, 翟国君, 等. 2024. 全张量重力梯度正演计算及其可视化系统构建[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 49(11): 1992-2002.
- Bian S F, Li Z Q, Zhai G J, et al. 2024. Construction of full tensor gravity gradient orthogonal computation and its visualization system[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 49(11): 1992-2002. (in Chinese)
- 胡双贵, 李广, 汤井田, 等. 2024. 利用重力梯度张量等位面曲率的地体定位[J]. 地球物理学报, 67(4): 1641-1655.
- Hu S G, Li G, Tang J T, et al. 2024. Localization of geologic bodies using the curvature of the equipotential surface in gravity gradiometry[J]. Chinese Journal of Geophysics, 67(4): 1641-1655. (in Chinese)
- 冷洁, 邱峰. 2022. 有限圆柱体重力位三阶梯度张量正演计算公式[J]. 大地测量与地球动力学, 42(1): 96-99. (in Chinese)
- Leng J, Qiu F. 2022. Forward modeling formulae for third-order gradient tensor of gravitational potential caused by finite cylinder[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 42(1): 96-99. (in Chinese)
- 李静, 万晓云, 徐铭. 2023. 基于 GRACE 卫星数据和位错模型的 2007 年印尼明古鲁 $M_w 8.4$ 地震同震重力梯度信号对比分析[J]. 地震研究, 46(4): 521-528.
- Li J, Wan X Y, Xu M. 2023. Comparative analysis of the coseismic gravity gradient signals of the 2007 Bengkulu, Indonesia $M_w 8.4$ earthquake based on GRACE Satellite data and the dislocation Model[J]. Journal of Seismological Research, 46(4): 521-528.
- 刘繁明, 刘惠敏, 荆心. 2016. 基于旋转椭球体的等轴状场源重力异常场模型构建方法[J]. 中国惯性技术学报, 24(1): 26-29. (in Chinese)
- Liu F M, Liu H M, Jing X. 2016. Modeling of isometric field-source in gravity anomaly field based on rotational ellipsoid[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 24(1): 26-29. (in Chinese)
- 刘金钊, 梁星辉, 叶周润, 等. 2023. 考虑地表起伏的不规则区域重力梯度场模型构建方法——以云南地区为例[J]. 地震地质, 45(5): 1129-1146.

- Liu J Z, Liang X H, Ye Z R, *et al.* 2023. Study on the regional gravity gradient field modeling in irregular area with consideration of surface fluctuation: A case study of Yunnan province [J]. *Seismology and Geology*, 45(5): 1129 – 1146. (in Chinese)
- 骆遥. 2008. 两种新的长方体重力场正演表达式及其理论推导[J]. *工程地球物理学报*, 5(2): 210 – 214.
- Luo Y. 2008. New expressions for gravitational attraction of a homogeneous rectangular prism and its deduction [J]. *Chinese Journal of Engineering Geophysics*, 5(2): 210 – 214. (in Chinese)
- 乔中坤, 张家俊, 张宗宇, 等. 2023. 重力梯度测量在城市空间探测中的应用[J]. *地质论评*, 69(S1): 419 – 422.
- Qiao Z K, Zhang J J, Zhang Z Y, *et al.* 2023. Application of gravity gradient measurements in urban space exploration [J]. *Geological Review*, 69(S1): 419 – 422. (in Chinese)
- 孙文珂. 2017. 重力勘查资料解释手册[M]. 北京: 地质出版社.
- Sun W K. 2017. Manual for interpretation of gravity exploration data [M]. Beijing: Geology Press. (in Chinese)
- 曾华霖. 1999. 重力梯度测量的现状及复兴[J]. *物探与化探*, 23(1): 1 – 6.
- Zeng H L. 1999. Present state and revival of gravity gradiometry [J]. *Geophysical and Geochemical Exploration*, 23(1): 1 – 6. (in Chinese)
- 曾华霖. 2005. 重力场与重力勘探[M]. 北京: 地质出版社.
- Zeng H L. 2005. Gravity field and gravity exploration [M]. Beijing: Geology Press. (in Chinese)
- 詹毅. 2003. 应用三角元法计算垂直圆柱体的重力异常[J]. *物探化探计算技术*, 25(4): 5.
- Zhan Y. 2003. The numerical solution of gravity anomaly of a vertical cylinder by the triangle element method [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 25(4): 5. (in Chinese)
- 张赤军, 边少锋, 周旭华, 等. 2007. 重力垂直梯度的测定及其应用与潜力[J]. *地球物理学进展*, 22(6): 1686 – 1691. (in Chinese)
- Zhang C J, Bian S F, Zhou X H, *et al.* 2007. Determination of gravity vertical gradient and its application and potential [J]. *Progress in Geophysics*, 22(6): 1686 – 1691.
- 张剑, 师学明, 刘梦花, 等. 2007. 基于 Matlab 开发环境的球体重力正演[J]. *工程地球物理学报*, 4(5): 460 – 464.
- Zhang J, Shi X M, Liu M H, *et al.* 2007. The spherical gravitational forward modeling based on Matlab development environment [J]. *Chinese Journal of Engineering Geophysics*, 4(5): 460 – 464. (in Chinese)
- Goodacre A K. 1973. Some comments on the calculation of the gravitational and magnetic attraction of a homogeneous rectangular prism [J]. *Geophysical Prospecting*, 21(1): 66 – 69.
- Li X, Chouteau M. 1998. Three – dimensional gravity modeling in all space [J]. *Surveys in Geophysics*, 19(4): 339 – 368.
- Mehanee S A. 2014. Accurate and efficient regularized inversion approach for the interpretation of isolated gravity anomalies [J]. *Pure and Applied Geophysics*, 171(8): 1897 – 1937.
- Nagy D, Papp G, Benedek J. 2000. The gravitational potential and its derivatives for the prism [J]. *J Geod*, 74(7 – 8): 552 – 560.
- Nagy D. 1966. The gravitational attraction of a right rectangular prism [J]. *Geophysics*, 31(2): 362 – 371.

Research on Forward Calculation Method of Gravity and Gradient Anomalies of Finite Homogeneous Ellipsoid Model

WANG Jiyu^{1,2,3}, SUN Hongbo^{1,2,3}, LIANG Xiao^{1,2,3}, NI Hongyu^{1,2,3},
HUANG Xianliang^{1,2,3}, LI Wenyao⁴, HAN Runsheng⁴

(1. *Anhui Earthquake Agency, Hefei 230001, Anhui, China*)

(2. *Anhui Key Laboratory of Subsurface Exploration and Earthquake Hazard Risk Prevention, Hefei 230001, Anhui, China*)

(3. *Mengcheng National Geophysical Observatory, Mengcheng 233500, Anhui, China*)

(4. *Southwest Geological Survey Institute, Nonferrous Metals Mineral Geological Survey Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, Yunnan, China*)

Abstract

Based on special cases of finite homogeneous ellipsoids—spherical and rotating ellipsoidal models, this paper derives more generally applicable formulas for calculating the gravity anomaly V_z and its gravity gradients V_{xz} , V_{yz} , V_{zz} , and V_{zzz} for a triaxial ellipsoid model with unequal axes. Using Matlab as a development tool, a computation program was developed to obtain the corresponding calculation data and plot profiles and contour maps of gravity anomalies for each component. By comparing the results with published typical examples of spherical and rotating ellipsoidal models, the correctness of the formulas was verified. The results demonstrate that although triaxial ellipsoids with three distinct axes share similar gravity anomaly variation patterns with spherical and rotational ellipsoidal models, their numerical characteristics exhibit significant dependence on morphological parameters. This investigation validates the rationality and superiority of the triaxial ellipsoid model in characterizing complex geological formations. The proposed model not only preserves the fundamental field characteristics inherent to spherical bodies, but also enables precise quantification of detailed gravity anomaly variations induced by critical parameters of practical geological structures. Particularly, the triaxial dimensional discrepancies facilitate accurate characterization of field perturbations caused by differential volume distributions and heterogeneous mass configurations within actual geological bodies.

Keywords: ellipsoidal models; gravity anomaly; forward modeling; calculation method