

# 不同参考面块体应变计算公式的对比分析\*

武艳强<sup>1</sup>, 江在森<sup>1</sup>, 杨国华<sup>2</sup>

(1. 中国地震局地震预测研究所, 北京 100036; 2. 中国地震局第一监测中心, 天津 300180)

**摘要:**通过对不同块体应变计算公式的分析, 利用模拟数据作为输入、采用经典平差方法求解应变参数并评定精度, 进而对比不同参考面块体应变计算公式的差异。同时对小样本和大样本模拟数据应变计算结果进行统计分析。结果表明, 平面公式与球面公式计算结果的差异与计算区域的大小有关, 由投影误差决定, 与点位的纬度分布没有必然的联系。因此, 在小区域进行应变计算不会因为公式不同而导致结果的系统性差异。

**关键词:** 高斯投影; 兰勃脱投影; 测量平差; 模拟数据; 差异统计; 块体应变

**中图分类号:** P227

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-0666(2009)04-0372-05

## 0 引言

人们在研究地壳形变问题时经常计算指定区域的应变场, 其原因在于应变场的计算不受参考框架的影响, 而位移场、速度场则不可避免受之影响。利用 GPS 资料计算应变场的公式有多种, 如李延兴等 (2001)、Savage 等 (2001)、石耀霖和朱守彪 (2004, 2006)、黄立人和王敏 (2003)、顾国华等 (2001)、陶本藻 (2001) 都对应变计算公式进行过深入研究。同时, 多位研究者利用 GPS 资料研究中国大陆应变场及块体运动, 并取得了丰硕的成果, 如江在森等 (2003)、杨国华等 (2002, 2008)、张培震等 (2003)、王敏等 (2003)、张晓亮等 (2005)。不同学者通过不同方法获取的应变结果不尽相同, 由于在传统应变计算中主要采用平面公式, 所以不同公式 (平面公式与球面公式) 计算结果的差异到底有多大是一个需要研究的问题。

本文首先对不同应变计算公式进行分析, 然后在不同的区域用模拟数据作为输入, 对比不同公式的计算结果并进行统计分析, 最终给出分析结果。文中涉及的应变计算公式主要包括微分公式、球面公式和平面公式。

## 1 不同参考面应变计算公式

### 1.1 位移与应变的微分关系

石耀霖和朱守彪 (2006)、傅容珊和黄建华 (2001) 均提到了平面和球面应变计算的微分表达式:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \frac{1}{(R+h)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_h}{(R+h)} \\ \varepsilon_\lambda = \frac{1}{(R+h)\cos\varphi} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{u_\varphi}{(R+h)} \tan\varphi + \frac{u_h}{(R+h)} \\ \varepsilon_{\lambda\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(R+h)\cos\varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{u_\lambda}{(R+h)} \tan\varphi + \frac{1}{(R+h)} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \varphi} \right] \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\varphi$  为纬度、 $\lambda$  为经度、 $R$  为平均曲率半径、 $h$  为大地高。由于本文主要研究球面应变计算, 所以不

\* 收稿日期: 2008-07-21.

**基金项目:** 中国地震局地震预测研究所基本科研业务专项 (02092401)、国家科技支撑计划重点项目 (2006BAC01B02-02-02) 和国家科技支撑计划重点项目 (2006BAC01B03-01-01) 联合资助

考虑  $\mu_h$  对应变参数的影响, 即令  $\mu_h = 0, h = 0$ 。

通过分析公式 (1) 和 (2), 可发现公式 (2) 中纬向位移  $u_\varphi$  会影响应变参数  $\varepsilon_\lambda$ 、经向位移  $u_\lambda$  会影响应变参数  $\varepsilon_{\lambda\varphi}$ , 而公式 (1) 中没有该部分, 因

此在块体应变计算中需要确定该部分的影响。

## 1.2 不同参考面块体应变计算公式

李延兴等 (2001) 提出了块体运动模型, 在球面双曲坐标系下给出了块体应变计算公式:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\sin\varphi\cos\lambda & -R\sin\varphi\sin\lambda & R\cos\varphi \\ R\sin\lambda & -R\cos\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_e & \varepsilon_{en} \\ \varepsilon_{ne} & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda - \lambda_0)R\cos\varphi \\ (\varphi - \varphi_0)R \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中的  $\lambda$ 、 $\varphi$  分别为观测点的经度、纬度,  $V_e$  和  $V_n$  为  $E$  向位移和  $N$  向位移;  $\omega_x$ 、 $\omega_y$  和  $\omega_z$  为块体的欧拉矢量;  $R$ 、 $\lambda_0$ 、 $\varphi_0$  分别代表块体的平均曲率半径、几何中心经度和几何中心纬度;  $\varepsilon_e$ 、 $\varepsilon_{en}$ 、 $\varepsilon_{ne}$

和  $\varepsilon_n$  为应变张量。

Savage 等 (2001) 根据公式 (2) 经过泰勒级数展开给出了具体的应变计算公式。

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & -R\cos\theta_0\Delta\lambda & R\Delta\theta \\ -R\cos\theta_0\Delta\lambda & R & -R\sin\theta_0\Delta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\theta \\ \omega_\lambda \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R\sin\theta_0\Delta\lambda & R\Delta\theta & 0 \\ 0 & R\sin\theta_0\Delta\lambda & R\Delta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\lambda \\ \varepsilon_{\lambda\theta} \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\theta$  和  $\lambda$  表示余纬度和经度,  $\Delta\theta$  和  $\Delta\lambda$  分别为测点到区域几何中心点的余纬差和经度差。需要注意的是  $\theta$  的方向为南向, 余纬差不同于纬差, 在计算中应注意正负号, 这一点不同于公式 (3)。

陶本藻 (2001) 提到了平面上应用位移矢量计算应变的方法:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x0} + x\varepsilon_x + y\varepsilon_{xy} - y\omega, \\ V_y &= V_{y0} + x\varepsilon_{xy} + y\varepsilon_y + x\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $V_x$ 、 $V_y$  为位移矢量;  $V_{x0}$ 、 $V_{y0}$  为平移参数;  $\omega$  为旋转参数;  $x$ 、 $y$  为观测点的坐标;  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_{xy}$ 、 $\varepsilon_y$  为应变张量。

在利用公式 (5) 计算应变参数时需要进行一些准备工作。首先, 需要为平面投影选择合适的中央子午线。其次, 根据投影原理 (孔祥元等, 2001; 宁津生等, 2006) 还需对位移矢量进行子午线收敛角的改正用以削弱角度变形。最后, 由于位移向量在投影过程中还会产生长度变形, 所以需要位移矢量进行长度改正。

公式 (3) ~ (5) 给出了不同参考面的应变计算公式, 通过分析公式 (3) 和 (4) 可以发现二者的应变计算部分基本一致 (仅在符号上有差别), 而欧拉参数部分有一定差别, 前者的欧拉参数计算为严密公式, 后者为近似公式。所以本文主要对比公式 (3) 和公式 (5) 的计算结果。通过分析公式 (3) 和公式 (5), 发现它们的应变计

算结果都归算到研究区域的几何中心处, 由于本文选择的中央子午线为研究区域的中心经度, 所以平面投影的纵坐标与中心经线方向一致, 进而公式 (5) 中  $\varepsilon_x$  与公式 (3) 中  $\varepsilon_n$  的方向一致。同时, 平面投影的横坐标与区域几何中心纬度的切线方向一致, 因此  $\varepsilon_y$  与  $\varepsilon_e$  的方向一致, 进而可知  $\varepsilon_{xy}$  与  $\varepsilon_{ne}$  的方向一致。

为了分析不同投影方案对应变计算结果的影响程度, 本文采用高斯投影和兰勃托割圆锥投影进行平面应变计算。两种投影的中央子午线均为研究区域的中心经度, 兰勃脱割圆锥投影的两条割线为研究区域的最大纬度和最小纬度。对于两种投影的详细情况, 限于篇幅在此不再详述, 可参阅相关文献 (於宗涛, 鲁林成, 1978; 孔祥元等, 2001)。

## 2 小样本不同参考面应变计算结果对比

通过分析公式 (3) 和公式 (5) 可知它们的待定未知数均为 6 个, 原则上只需 3 个观测点就可以求解。但为了评定参数精度, 在下面的实验中采用 4 个点进行计算。实验中的输入数据为模拟数据, 如表 1 所示。该数据一共包括 4 组, 每组 4 个点, 数据单位为 mm。4 组数据在实验中分布在不同的纬度地区, 每组数据的覆盖区域为  $1.5^\circ$ 。根据表 1 的数据, 通过对公式 (2) 中  $\frac{u}{R}\tan\varphi$  项量级

表 1 实验用模拟数据 (单位: mm)

Tab. 1 The simulation data for experiment (unit: mm)

组号	E 向位移	N 向位移	E 向位移中误差	N 向位移中误差	组号	E 向位移	N 向位移	E 向位移中误差	N 向位移中误差
1	301.9	-103.0	1.6	1.7	2	128.7	-152.6	1.7	1.3
	319.5	-103.7	1.2	1.1		128.1	-152.9	1.0	1.6
	318.1	-109.2	1.4	1.0		132.2	-153.8	1.7	1.3
	314.9	-107.2	1.8	1.4		131.1	-154.5	1.6	1.0
3	228.2	111.8	1.5	1.6	4	132.3	-163.7	1.0	1.9
	226.5	110.4	1.3	1.2		131.5	-164.2	1.7	1.7
	236.6	119.2	1.3	1.1		142.3	-159.4	1.0	1.4
	229.4	114.3	1.9	1.3		141.0	-159.7	1.4	1.1

的估计可知如果点位分布在纬度 45°左右, 平面结果与球面结果的差异将达到  $10^{-8}$  量级。下面对该模拟数据进行应变参数计算, 进而探讨不同参考面结果的差异。

在实验中把表 1 的 4 组数据分布于北半球, 对

经度分布范围不做特殊限定, 覆盖区域的平均纬度在计算结果中给出。并且严格限定每组 4 条数据的覆盖范围小于 1.5° (赤道附近约 165 km), 测点分布网型良好。表 2 给出了 2 个公式、4 组数据的计算结果。

表 2 小区域不同公式计算结果 ( $10^{-8}$ )

Tab. 2 The calculation results by different formulas in small region

组号	平均纬度/(°)	公式	$\varepsilon_e$	Error	$\varepsilon_e$	Error	$\varepsilon_e$	Error
1	1.800	1	7.052	3.337	0.494	2.204	-3.162	2.812
		3 (高斯)	7.031	3.314	0.509	2.197	-3.156	2.811
		3 (割圆锥)	7.030	3.339	0.497	2.214	-3.172	2.832
2	35.025	1	1.630	0.698	1.878	0.415	-0.948	0.476
		3 (高斯)	1.629	0.711	1.884	0.423	-0.958	0.488
		3 (割圆锥)	1.629	0.684	1.883	0.407	-0.950	0.469
3	66.95	1	-0.765	6.063	8.311	2.994	4.054	2.268
		3 (高斯)	-0.756	6.144	8.272	3.035	4.115	2.303
		3 (割圆锥)	-0.759	6.125	8.271	3.026	4.111	2.296
4	85.325	1	34.349	11.361	16.959	6.732	2.670	1.191
		3 (高斯)	34.359	11.740	16.839	7.048	2.646	1.229
		3 (割圆锥)	34.355	11.709	16.845	7.030	2.648	1.226

表 2 的计算结果显示不同公式的差异不大。为了更加清楚的对比平面结果与球面结果的差异, 表 3 给出了相对差异分布情况。其中, 相对差异 = (平面计算结果 - 球面计算结果) / 球面计算结果, 然后取其绝对值并以百分比形式列于表中。

表 2 和表 3 显示平面应变结果与球面结果相差非常小, 相对差异最大的为高斯平面结果的第 1 组  $\varepsilon_{en}$ , 相对差异达到 3%, 绝对差异仅为  $0.015 \times 10^{-8}$ 。据此可知球面结果与平面结果在小区域的差异非常有限, 差异的大小与测点的纬度分布没有必然的联系。

表 3 平面应变结果与球面结果差异

Tab. 3 The difference of strain results between plane formula and sphere formula

组号	参考面	$\varepsilon_e$	$\varepsilon_{en}$	$\varepsilon_n$	组号	参考面	$\varepsilon_e$	$\varepsilon_{en}$	$\varepsilon_n$
1	高斯投影	0.30%	3.04%	0.19%	2	高斯投影	0.06%	0.32%	1.06%
	割圆锥投影	0.31%	0.61%	0.32%		割圆锥投影	0.06%	0.27%	0.21%
3	高斯投影	1.18%	0.47%	1.51%	4	高斯投影	0.03%	0.71%	0.90%
	割圆锥投影	0.78%	0.48%	1.41%		割圆锥投影	0.02%	0.67%	0.82%

3 大样本不同参考面应变计算结果对比

前面分析了小区域平面应变结果与球面应变结果的差异，实验中仅有 4 组结果，不具有普遍意义。为了更加深入的讨论不同公式结果差异的普遍特征，下面对更大的样本进行分析并计算其相对差异，并讨论其分布特征。在分析中按不同的覆盖面积（其中小区域覆盖范围 <1.5°、1.5° < 中区域覆盖范围 <3.0°、3.0° < 大区域覆盖范围 <5.0°）进行，每个区域的样本数量为 1 500（参与统计的参数为 4 500 个）。在点位的选择上，尽量使数据分布于不同的纬度（1°N ~ 80°N）上，但始终保持网型的良好。图 1 ~ 3 给出了不同覆盖面积的相对差异分布图，其中 1a ~ 3a 为高斯投影结果与球面结果的差异分布，图 1b ~ 3b 为兰勃脱割圆锥投影结果与球面结果的差异分布。图中横坐标为相对差异的不同分布区间，纵坐标为该区间的样本个数所占的百分比。

图 1 ~ 3 显示随着区域的增大，相对差异小于 1% 的比重逐渐下降而相对差异大于 1% 的比重逐渐上升。并且，高斯投影平面结果的相对差异分布情况与割圆锥投影的统计结果特征一致。因此可以初步认为，平面应变结果与球面应变结果的差异随着区域的增大逐渐增大，该特性是由投影误差决定的。另外，即使在中等区域，相对差异小于 10% 的结果也占绝大部分比例，因此在中等区域和小区域平面结果是可以接受的。

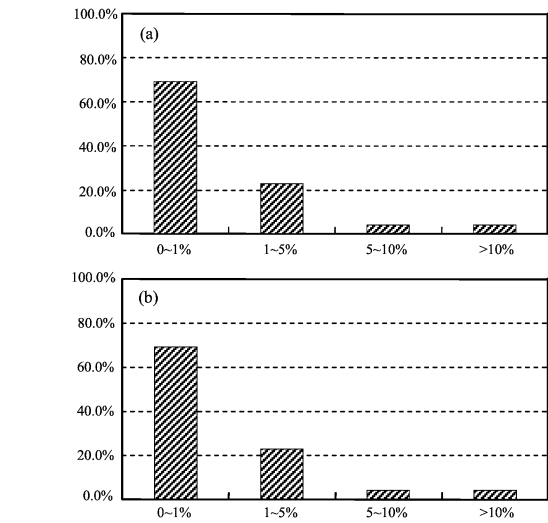


图 1 小区域不同参考面应变相对差异统计图  
Fig.1 The statistics chart of relative difference of strain based on different reference surface in small region

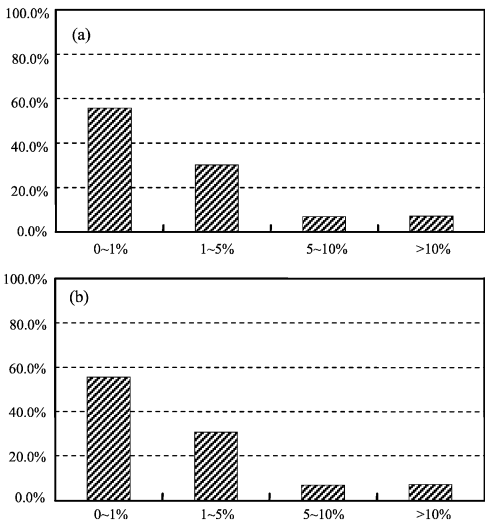


图 2 中等区域不同参考面相对差异统计图  
Fig.2 The statistics chart of relative difference of strain based on different reference surface in medium region

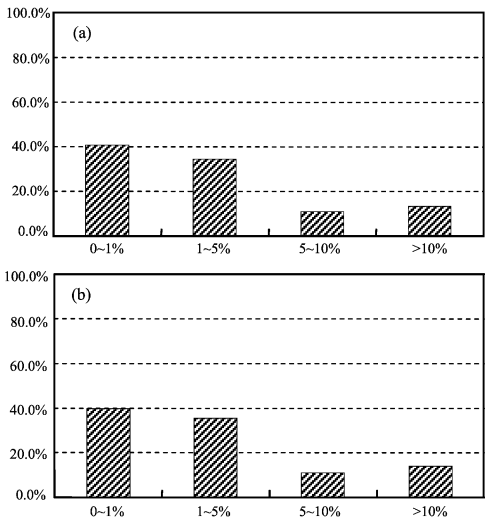


图 3 大区域不同参考面应变相对差异统计图  
Fig.3 The statistics chart of relative difference of strain based on different reference surface in large region

4 讨论与结论

(1) 球面应变微分公式中  $\frac{u}{R} \tan \varphi$  一项的意义。通过分析可以发现直接利用该项做出平面公式与球面公式存在系统差异的论断是不合适的。比如就中国大陆范围内来讲，根据公式（2）采用全球基准的位移数据和欧亚基准的位移数据进行应变计算，将得到不同的结果，这与应变不受整体刚性运动影响的论断不符。所以，在利用公式（2）的微分公式进行应变计算时应该首先扣除计算区

域的整体刚性运动。

(2)  $\frac{u}{R}\tan\varphi$  项对块体应变计算公式影响的解释。应变是一定区域内不同点的不同位移产生的综合结果, 假设有限的点分布于一个小区域内, 由于范围较小因此  $\tan\varphi$  差异不会太大, 在均匀变形的前提下位移的差异也不可能太大。所以, 在区域内进行块体应变计算时,  $\frac{u}{R}\tan\varphi$  的影响可能绝大部分得以抵消, 原因在于该项影响的量值在不同测点处相当, 无法产生差异性。

(3) 关于应变计算公式的选择。本文初步讨论了不同参考面的应变计算公式的差异特征, 在中小区域内 ( $<3^\circ$ ) 平面结果与球面结果基本一致。所以, 对于大区域, 应该首选公式 (3); 在中小区域内可以任选公式 (3) 或公式 (5)。另外, 考虑到计算的简便性及对地球形状描述的近似性, 建议优先选择公式 (3)。

致谢: 感谢王敏研究员和郝钦文研究员在本文的研究过程中给予的帮助。

## 参考文献:

- 傅容珊, 黄建华. 2001. 地球动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社.
- 顾国华, 申旭辉, 王敏, 等. 2001. 中国大陆现今地壳水平运动基本特征 [J]. 地震学报, 23 (4): 263–369.
- 黄立人, 王敏. 2003. 中国大陆构造块体的现今活动和变形 [J].

- 地震地质, 25 (1): 23–32.
- 江在森, 马宗晋, 张希, 等. 2003. GPS 初步结果揭示的中国大陆水平应变场与构造变形 [J]. 地球物理学报, 46 (3): 352–358.
- 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉, 等. 2001. 大地测量学基础 [M]. 武汉: 武汉大学出版社.
- 李延兴, 黄城, 胡新康, 等. 2001. 板内块体的刚性弹塑性运动模型与中国大陆主要块体的应变状态 [J]. 地震学报, 23 (6): 565–572.
- 宁津生, 刘经南, 陈俊勇, 等. 2006. 现代大地测量理论与技术 [M]. 武汉: 武汉大学出版社.
- 石耀霖, 朱守彪. 2004. 利用 GPS 观测资料划分现今地壳活动块体的方法 [J]. 大地测量与地球动力学, 24 (2): 1–5.
- 石耀霖, 朱守彪. 2006. 用 GPS 位移资料计算应变方法的讨论 [J]. 大地测量与地球动力学, 26 (1): 1–8.
- 陶本藻. 2001. 自由网平差与变形分析 [M]. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社.
- 王敏, 沈振康, 牛之俊, 等. 2003. 现今中国大陆的地壳运动与活动块型 [J]. 中国科学 (D 辑), 33 (增刊): 21–32.
- 杨国华, 李延兴, 韩月萍, 等. 2002. 由 GPS 观测结果推导中国大陆现今水平应变场 [J]. 地震学报, 24 (4): 337–347.
- 杨国华, 张晓东, 张风霜, 等. 2008. 昆仑山口西 8.1 级地震震后中国西部地壳水平位移场的变化特征 [J]. 地震研究, 31 (1): 77–82.
- 於宗俦, 鲁林成. 1978. 测量平差基础 [M]. 北京: 测绘出版社.
- 张培震, 邓启东, 张国民, 等. 2003. 中国大陆的强震活动与活动地块 [J]. 中国科学 (D 辑), 33 (增刊): 12–20.
- 张晓亮, 江在森, 王双绪, 等. 2005. 川滇地区现今块体水平运动变形特征分析 [J]. 地震研究, 28 (3): 262–267.
- Savage J C, Weijun Gan, Svarc J L. 2001. Strain accumulation and rotation in the eastern California Shear Zone [J]. JGR, 106 (B10): 21 995–22 007.

# The comparative analysis of block strain calculation formulas based on different reference surfaces

WU Yan-qiang<sup>1</sup>, JIANG Zai-sen<sup>1</sup>, YANG Guo-hua<sup>2</sup>

(1. Institute of Earthquake Prediction, CEA, Beijing 100036, China)

(2. First Crustal Monitoring and Application Center, CEA, Tianjin 300180, China)

## Abstract

On the analysis of the different block strain calculation formulas, the classic adjust method is used to calculate the strain parameters and their errors using simulation data, and then the difference of these formulas based on different reference surfaces are compared. In this paper, the statistics results are analyzed based on the simulation data of small samples and large samples, and the results reveal the outcomes of these formulas are identical in small area. Their differences are related to the area of region, which are decided by projection error, and they do not relate to the latitude distribution. So, the strain results obtaining from different formulas in small region do not have systemic difference.

**Key words:** Gauss projection, Lambert projection, survey adjustment, simulation data, difference statistics, block strain