

李孟洋, 刘少林, 杨顶辉, 等. 2025. 谱元法模拟地震波传播地震点源处理方法[J]. 地震研究, 48(3): 401–412, doi:10.20015/j.cnki. ISSN1000–0666. 2025. 0042.

Li M Y, Liu S L, Yang D H, et al. 2025. The approximation approaches for seismic point sources with spectral element method when simulating seismic wavefields[J]. *Journal of Seismological Research*, 48(3): 401–412, doi:10.20015/j.cnki. ISSN1000–0666. 2025. 0042.

谱元法模拟地震波传播地震点源处理方法*

李孟洋^{1,2}, 刘少林^{2♣}, 杨顶辉³, 李小凡⁴

(1. 中国科学院大学 地球与行星科学学院, 北京 100049; 2. 应急管理部国家自然灾害防治研究院, 北京 100085;
3. 清华大学 数学科学系, 北京 100084; 4. 中国地质大学 地球物理与空间信息学院, 武汉 430074)

摘要: 在利用谱元法求解地震波运动方程时需要对方程进行离散, 然而由于震源项常包含 δ 函数, 该函数是奇异函数, 通过数值近似具有一定难度, 因此需要采用特殊方式处理震源项。引入 δ 函数的2类离散形式, 以谱元法求解地震波运动方程为例, 详细给出了震源项离散形式。为了验证这种震源处理方法的有效性, 开展了多组数值模拟实验。首先在规则网格下, 模拟了 δ 函数离散形式处理单极震源和矩张量震源的情况; 其次在非规则网格下, 模拟了 δ 函数离散形式处理地震点源情况。数值实验表明, 在谱元法模拟地震波传播时, 利用 δ 函数离散形式近似地震点源项, 可得到高精度数值模拟结果。

关键词: 谱元法; 地震波运动方程; 数值模拟; δ 函数

中图分类号: P315.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000–0666(2025)03–0401–12

doi:10.20015/j.cnki. ISSN1000–0666. 2025. 0042

0 引言

地震成像通过拟合地震波观测数据和合成数据(理论计算数据)反演地球内部介质参数, 是研究地球内部结构的主要方法之一(Lei et al, 2023; Lin et al, 2023)。目前基于地震波形的成像方法, 如逆时偏移成像(Feng, Schuster, 2017; Cho, Gibson, 2019)、地震波形层析成像(李冰非等, 2019)等, 已被广泛应用于地球浅深部结构成像(刘玉柱等, 2019; 王光文等, 2023)。在开展地震波形成像研究时, 地震波数值模拟是其中的关键步骤, 目前地震波数值模拟方法主要为有

限差分方法(Finite-difference Method, FDM)(Chen et al, 2011; Lyu et al, 2020)、有限元法(Finite-element Method, FEM)(Liu et al, 2014; Yao et al, 2018)和谱元法(Spectral-element Method, SEM)(Tromp et al, 2008; Mazzieri et al, 2013)等。FDM因具有数值计算效率高、实现相对简单的优点而被广泛应用于地震波数值模拟中, 但该方法通常使用规则矩形网格模拟地震波传播, 而矩形网格模型难以拟合复杂界面。另外, 在模型自由地表边界处, 难以通过FDM施加自由地表边界条件。因此, 当研究区地形较为复杂时, 使用该方法难以精确模拟地震波传播(杨尚倍等, 2018; Yi et al, 2019)。FEM具有

* 收稿日期: 2024–05–20.

基金项目: 国家自然科学基金(42174111); 北京市自然科学基金(8222033); 上海佘山地球物理国家野外科学观测研究站开放基金项目(SSOP202203)。

第一作者简介: 李孟洋(1995–), 博士研究生在读, 主要从事地震数值模拟、地震层析成像方面的研究。

E-mail: limengyang22@mails.ucas.ac.cn.

通信作者简介: 刘少林(1988–), 研究员, 主要从事地震波正反演研究。E-mail: shaolinliu88@163.com.

网格灵活性, 可采用非规则网格拟合自由地表, 并可自动满足自由地表边界条件, 然而 FEM 计算效率较低 (Bielak *et al*, 2005)。SEM 是一种模拟效率较高的方法, 该方法具有网格灵活性, 并具有自动满足自由地表边界条件的优点, 能在复杂模型中精确模拟地震波传播。因此, SEM 作为一种高精度地震波模拟方法而逐渐被应用于地震成像中 (Tromp *et al*, 2005; Tape *et al*, 2010; Tong *et al*, 2014)。

利用数值模拟地震波传播时, 需要对地震波运动方程进行离散化处理。将震源近似为点源时, 或将有限断层破裂面分解为若干个点源时 (Shen *et al*, 2022), 地震波运动方程中震源项包含 δ 函数 (Lay, 1992)。在数值模拟地震波传播中, SEM 可使用插值多项式离散震源项, 由于这种震源处理方式较为简单, 国内外大多数学者使用该种震源项 (Komatitsch, Tromp, 1999; 刘少林等, 2021; 孟雪莉等, 2022)。震源项的离散形式也可通过直接离散 δ 函数的方法得到, 但由于 δ 函数是奇异函数, 难以直接通过数值近似方法离散, 若离散方式不合理, 将会造成模拟地震波场产生虚假波动 (Jung, 2009; Zang *et al*, 2021)。

为了离散 δ 函数, 本文借鉴 FDM 处理震源项的思想, 通过引入伪 δ 函数得到 δ 函数离散形式 (Herrmann, 1979; Jung, 2009), 可得到第一类 δ 函数离散形式。考虑到离散点采样的波数响应函数在波数域为有界函数的特征, 在波数域设计一个窗函数, 然后对该窗函数进行傅立叶逆变换, 得到了第二类 δ 函数离散形式。将 2 类 δ 函数离散形式应用于 SEM 中, 并模拟点源激发的地震波传播。为了检验 SEM 模拟地震波传播时利用 δ 函数离散形式处理点源的可行性, 最后开展了多组数值算例, 分析了震源项处理方式对不同类型地震点源的处理能力。

1 谱元法求解波动方程基本原理

为论述简便, 本文以二维情况为例, 简要介绍了 SEM 求解弹性波动方程的基本原理。在二维非均

匀各向同性介质中, 弹性波运动方程可表示为:

$$\begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \\ \mathbf{T} = \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} \end{cases} \quad (1)$$

式中: ρ 为介质密度; \mathbf{u} 为位移矢量; $\ddot{\mathbf{u}}$ 为位移对时间的二阶导数; ∇ 为梯度算子; \mathbf{T} 为应力张量; \mathbf{c} 为弹性张量; 假设震源为点源, 震源项 \mathbf{f} 表达式为:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \delta[\mathbf{x} - \mathbf{d}(\mathbf{x}_s)] S(t) \mathbf{I}_s \quad (2)$$

或

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{M} \cdot \nabla \delta[\mathbf{x} - \mathbf{d}(\mathbf{x}_s)] S(t) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 为震源函数; \mathbf{I}_s 为震源分量向量; \mathbf{M} 为地震矩张量; ∇ 为空间梯度算子; $\delta(\mathbf{x})$ 为空间 δ 函数; $\mathbf{d}(\mathbf{x}_s)$ 为震源位置; $S(t)$ 为震源时间函数。

式 (1) 为弹性波运动方程的强形式, 利用变分原理可以得到式 (1) 的弱形式。首先将式 (1) 两端同时乘以测试向量 \mathbf{w} 可得:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d^2 \mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T} d^2 \mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d^2 \mathbf{x} \quad (4)$$

式中: Ω 为计算区域; \mathbf{n} 为计算区域单位法向量; $\partial \Omega$ 为计算区域边界。在地球自由地表处满足边界条件 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0$ (即地表法向应力为 0), 所以式 (4) 可简化为:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d^2 \mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T} d^2 \mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f} d^2 \mathbf{x} \quad (5)$$

式 (5) 即为弹性波运动方程的弱形式。相对于式 (1) 而言, 式 (5) 具有自动满足自由地表边界条件的优点。如果使用 SEM 数值求解弹性波运动方程, 首先需要将计算区域 Ω 离散为 N_e 个不重叠的四边形单元 Ω_e (二维情况下), 为了降低计算复杂度, 通常将物理域单元 Ω_e 转换到参考域单元 Ω'_e , 然后在参考域求解式 (5)。 Ω_e 与 Ω'_e 的数值映射关系为 (Komatitsch, Tromp, 1999):

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^N N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a \quad (6)$$

式中: $\mathbf{x} = (x, z)$ 为物理域中的坐标; $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ 为参考单元上的坐标, 且 $-1 \leq \xi_1 \leq 1$ 、 $-1 \leq \xi_2 \leq 1$; N 为单元节点数; $N_a(\boldsymbol{\xi})$ 为关于第 a 个插值节点的形函数, 由 Legendre 多项式构成; \mathbf{x}_a 为参考单元控制点在物理域中的坐标。某个单元 e 内的函数值可以通过 Lagrange 多项式插值表示:

$$\mathbf{u}_e[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})] \approx \sum_{\alpha, \beta=0}^M \mathbf{u}_e^{\alpha, \beta} l_\alpha(\xi_1) l_\beta(\xi_2) \quad (7)$$

式中: $l_\alpha(\xi_1)$ 和 $l_\beta(\xi_1)$ 为 Lagrange 插值基函数; M 为插值阶数。将式 (7) 带入式 (5) 中并消去测试向量 \mathbf{w} 可得到式 (4) 的离散形式 (Komatitsch, Tromp, 1999; 刘少林等, 2021):

$$\sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e = - \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}^e \mathbf{P}^e + \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}^e \quad (8)$$

式中: \mathbf{M}^e 为单元质量矩阵; \mathbf{K}^e 为单元刚度矩阵; \mathbf{P}^e 为与单元介质参数、雅克比矩阵和坐标转换因子有关的向量; \mathbf{F}^e 为单元震源项离散形式。矩阵和向量的具体形式参见附录 A。

$$\tilde{\delta}_1(x) = \frac{1}{2\Delta x} \begin{cases} 0 & (x \leq -2\Delta x) \\ \frac{(x+2\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} & (-2\Delta x < x \leq -\Delta x) \\ -\frac{(x+2\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} + \frac{2(x+2\Delta x)}{\Delta x} - 1 & (-\Delta x < x \leq \Delta x) \\ \frac{(x+2\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{4(x+2\Delta x)}{\Delta x} + 8 & (\Delta x < x \leq 2\Delta x) \\ 0 & (2\tau < \Delta x) \end{cases} \quad (10)$$

式中: Δx 为网格间距。

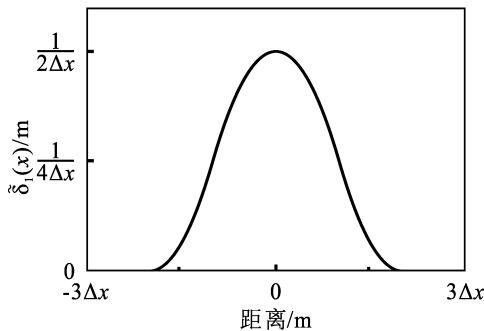


图1 第一类 δ 函数离散形式 ($\tilde{\delta}_1$) 示意图

Fig. 1 The first type of discrete form of δ function ($\tilde{\delta}_1$)

2 震源处理

根据式 (2) 和式 (4) 可得弹性波运动方程的震源项表达式为:

$$\int_{\Omega} -\mathbf{M}:\mathbf{w} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) S(t) d^2\mathbf{x} \quad (9)$$

本文使用3种方法处理 δ 函数: 第一种方法使用空间平滑的伪 δ 函数直接得到其离散形式, 称之为第一类离散形式; 第二种方法通过对窗函数进行傅立叶逆变换得到 δ 函数离散形式, 称之为第二类离散形式; 第三种方法通过插值形函数得到震源项的离散形式, 该方法的详细介绍参见附录 A。下面详细介绍第一和第二种震源处理方法。

为了更好地使用网格节点离散 δ 函数, 选用的伪 δ 函数应具有空间光滑特征, 因此本文选用 Hermann (1979) 提出的伪 δ 函数, 称之为第一类离散形式, $\tilde{\delta}$ 函数为光滑函数, 其图像如图1所示, 且函数表达形式较简单, 其一维表达式为:

$$\begin{aligned} & (x \leq -2\Delta x) \\ & (-2\Delta x < x \leq -\Delta x) \\ & (-\Delta x < x \leq \Delta x) \\ & (\Delta x < x \leq 2\Delta x) \\ & (2\tau < \Delta x) \end{aligned} \quad (10)$$

δ 函数的理论波数响应为1, 即在所有波数范围具有相同的振幅。在近似理论 δ 函数时, 近似 δ 函数的波数响应特征应与理论 δ 函数相近。间隔为 Δx 的离散点采样极限频率为 $1/(2\Delta x)$, 使用间隔为 x 的离散点近似 δ 函数时, 应尽量满足该函数的波数响应在 $0 \sim 1/(2\Delta x)$ 范围内接近于1。因此, 在波数域设计一个窗函数, 然后对该窗函数进行傅立叶逆变换得到其波数响应, 也可得到 δ 函数离散形式, 称之为第二类离散形式。为了检验该方法得到的 δ 函数离散形式在地震波模拟时处理地震点源的有效性, 首先本文在波数域确定了采样点, 采样点在波数 $0 \sim 1/(2\Delta x)$ 范围内的波数谱幅直接

近 1。然后对采样点进行插值平滑处理得到一组平滑的波数谱函数 $H(k)$ (图 2a), 通过傅立叶逆变换求取 $H(k)$ 的单位脉冲响应即可得到 δ 函数第二类离散形式 ($\tilde{\delta}_2$) (图 2b)。由于 δ_2 函数具体表达式较难给出, 因此本文在表 1 中列出了该离散函数的离散数值。

使用 δ 函数离散形式具有 2 个优点: ①函数空间分布较为平滑 (图 1、2b), 可以显著地减小由于震源函数空间不连续引起的地震波虚假振动 (Jung, 2009; Zang *et al*, 2021); ②离散 δ 函数具有普适性, 可用于 FDM、FEM 以及 SEM 中的点源近似问题。以第一类 δ 函数离散形式 ($\tilde{\delta}_1$) 为例, 二维情况下 δ 函数的近似表达式为:

$$\hat{\delta}^{2D}(\mathbf{x}-\mathbf{d})=\tilde{\delta}_1(x-x_s)\tilde{\delta}_1(z-z_s) \quad (11)$$

式中: $\mathbf{d}(x_s, z_s)$ 为震源位置。将式 (11) 和式 (7) 代入到式 (9) 可得:

$$\sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} J_e^{ab} \left[\sum_{\alpha, \beta=0}^M \mathbf{w}^{\alpha, \beta} l_{\alpha}(\xi_1^a) l_{\beta}(\xi_2^b) \right] d^2 \mathbf{x} \approx \sum_{e=1}^N \sum_{a, b=0}^M \left\{ \omega^a \omega^b J_e^{ab} \left[\sum_{\alpha, \beta=0}^M \mathbf{g}^{\alpha, \beta} l_{\alpha}(\xi_1^a) l_{\beta}(\xi_2^b) \right] \right\} \quad (12)$$

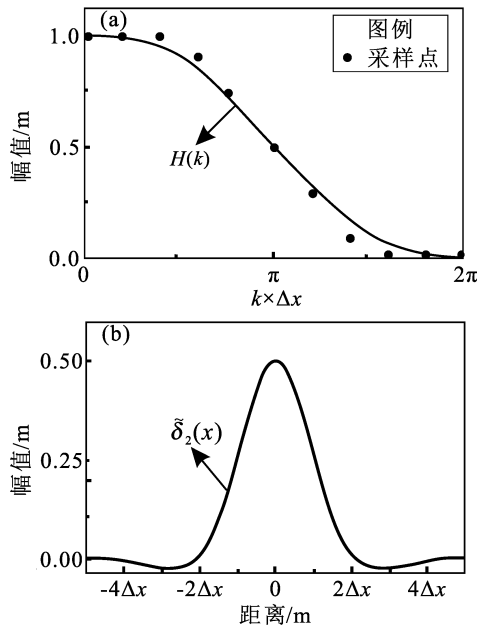


图 2 波数谱函数 $H(k)$ (a) 以及第二类 δ 函数离散形式 ($\tilde{\delta}_2$) (b)

Fig. 2 The wave number spectrum function $H(k)$ (a) and the second type of discrete form of δ function ($\tilde{\delta}_2$) (b)

表 1 第二类 δ 函数离散数值 ($\tilde{\delta}_2$)

a	$\tilde{\delta}_2(a \times x)$	a	$\tilde{\delta}_2(a \times x)$
0.00	0.499 030	2.75	-0.031 594
0.25	0.481 900	3.00	-0.024 285
0.50	0.433 220	3.25	-0.015 515
0.75	0.360 480	3.50	-0.007 975
1.00	0.274 380	3.75	-0.002 982
1.25	0.186 560	4.00	-0.000 053
1.50	0.107 400	4.25	0.000 971
1.75	0.044 251	4.50	0.001 103
2.00	0.000 520	4.75	0.000 891
2.25	-0.024 202	5.00	0.000 661
2.50	-0.033 265		

注: 当 $a > 5$ 时, $\tilde{\delta}_2 = 0$; 由于 $\tilde{\delta}_2$ 为偶函数, 表中只列出 $a \geq 0$ 时 $\tilde{\delta}_2$ 函数值; α 为网格间距。

式中: \mathbf{g} 为地震矩张量 \mathbf{M} 和 $\tilde{\delta}_1$ 函数的组合变量:

$$\mathbf{g}_i = -s(t) \sum_{j,k} \mathbf{M}_{ij} \frac{\partial [\hat{\delta}^{2D}(\mathbf{x}-\mathbf{d})]}{\partial x_j} \quad (13)$$

式 (12) 和 (13) 即为第一类 δ 函数离散形式的震源项表达式。

3 数值算例与分析

在数值模拟中, 本文称使用 δ 函数第一类离散形式处理震源的地震波模拟方法为 M1, 为了对比需要, 称使用 δ 函数第二类离散形式处理震源的地震波模拟方法为 M2, 称使用插值形函数处理震源的地震波模拟方法为 M3。M3 方法是 SEM 中较为常用的一种震源处理方法 (Komatitsch, Tromp, 1999; 刘少林等, 2021; 孟雪莉等, 2022), 但 M1 和 M2 方法使用较少。因此, 在 SEM 中使用 M1 和 M2 方法处理震源的可行性仍需检验。

为了研究在 SEM 地震波模拟中使用 δ 函数离

散形式处理震源的可行性, 本文首先开展了3组数值算例测试。第一组算例测试了使用 δ 函数离散形式处理单极震源 (Aki, Richards, 2002; Hicks, 2002) 的有效性。第二组算例测试了使用 δ 函数离散形式处理地震矩张量震源的有效性。这两组算例中离散模型由正方形网格构成。第三组算例测试了离散模型由非规则网格构成时, 使用 δ 函数离散形式处理震源的可行性, 因此该算例中使用的离散模型由非规则网格构成。为了测试 δ 函数离散形式在FDM地震波模拟中处理震源的可行性, 本文开展了第四组数值算例测试。

4组算例中震源时间函数 $S(t)$ 为Ricker子波, 其主频为20 Hz。模型介质P波速度为2 000 m/s, S波速度为1 250 m/s, 密度为2 000 kg/m³, 震源参数和模型参数如图3所示。数值模拟地震波时, 最短波长的网格点数应大于4 (刘璐等, 2013), 因此本节算例中SEM离散单元边长设置为20 m左右, 空间采用6阶插值 (最短波长网格点数约为16)。时间离散步长设置为0.2 ms, 地震波模拟时长为0.6 s。

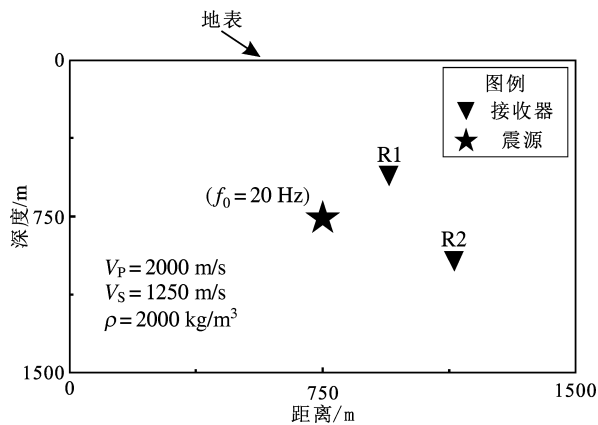


图3 介质模型示意图

Fig. 3 The sketch of the medium model

3.1 单极震源

本文首先考虑一种简单情况, 震源为单极震源, 表达式为 $\mathbf{f} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})S(t)\mathbf{I}_s$, 单极震源激发的地震波在无限半空间介质的解析解可通过Cagniard de Hoop方法计算 (De Hoop, 1959)。模拟数值解通过与解析解比较, 可定量分析模拟数值解的精度。

为分析在SEM模拟中使用M1、M2和M3方法处理震源的有效性, 本节首先开展了单极震源 (脉冲震源) 数值算例测试。该算例模拟了一个垂直集中力源 ($\mathbf{I}_s = [0, 1]^T$) 激发的地震波在介质中的传播。为了防止地震波在人工边界处产生虚假反射, 除自由地表边界外 (模型上边界) 的其他边界使用PML吸收边界吸收虚假反射 (Liu *et al.*, 2014)。

使用SEM模拟地震波得到合成波形, 由模拟结果减去解析解后除以解析解振幅最大值得到相对误差, 如图4所示。图4a为接收器R1、R2记录的SEM合成波形与解析波形的水平和垂直分量。从图中可以看出, M1、M2和M3方法模拟得到的合成波形与解析波形具有较好的一致性。为了进一步对比3种方法的模拟结果, 计算接收器R1、R2记录的SEM合成波形相对于解析解的相对误差。从图4b中可以看出, M2和M3模拟结果具有较高的精度 (最大波形误差小于5%), 但M1模拟结果精度相对较低 (最大波形误差为8%左右), 说明在使用SEM开展地震波模拟时, 使用M2和M3方法处理震源可得到精度较高的模拟结果, 且模拟得到的波形不需要进行归一化处理即可与解析解较好地匹配。

3.2 震源矩张量

为了测试M2方法能否精确模拟使用地震矩张量震源 (点源) 激发的地震波场, 本组算例选用了2个不同的地震矩张量, 模拟了地震矩张量震源激发的地震波场, 为了对比需要, 选用M3方法模拟结果作为参考解。本组测试中使用2种类型地震矩张量震源 (S1和S2), 其地震矩张量分别为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

和

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

模拟地震波结果如图5~8所示。其中, 震源S1为垂直集中力源, 震源S2为爆炸源。模型参数如图3所示。图5展示了垂直集中力源 (S1) 的地震波场快照, 从图中可看到清晰的P波和S波震相。

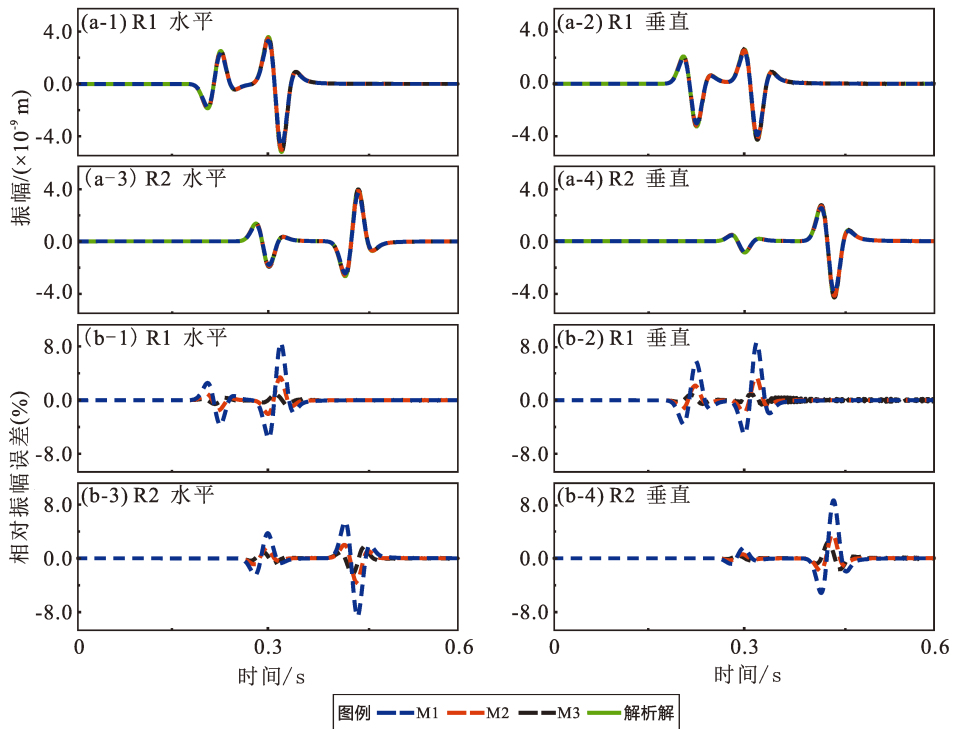


图4 接收器 R1、R2 记录的 SEM 合成波形与解析波形对比 (a) 以及两者的相对误差 (b)

Fig. 4 The SEM synthetic waveforms and analytical waveforms of Receiver 1 and Receiver 2 (a), and their relative errors (b)

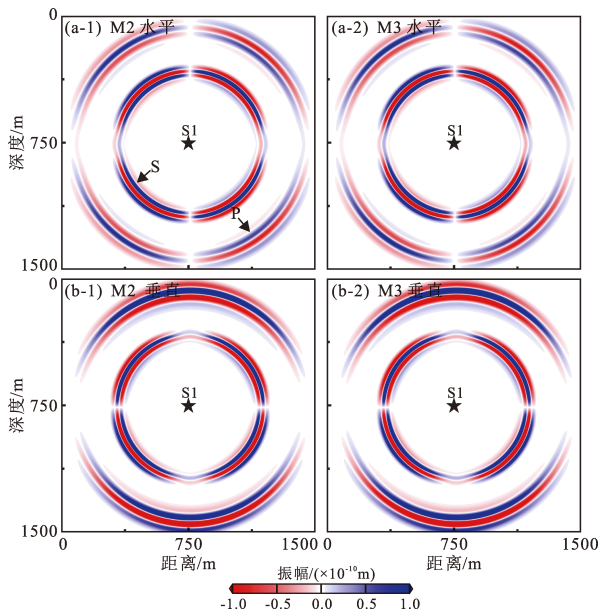


图5 $t=0.4$ s 时, 使用 M2、M3 方法计算得到震源 S1 激发的地震波场的水平 (a) 和垂直 (b) 分量波场快照

Fig. 5 The snapshots of the horizontal (a) and vertical (b) component of the excitation wavefield by Source 1 calculated respectively by M2 and M3 when $t=0.4$ s

从震源 S1 激发的地震波场在接收器 R1 和 R2 处的合成波形 (图 6a) 可看出, M2 方法模拟得到的合成波形与参考解 (M3 方法模拟结果) 具有较好的一致性, 且波形精度较高 (相对误差最大值约为 4%) (图 6b)。图 7 展示了爆炸源 (S2) 的地震波场快照, 波场快照显示震源 S2 只激发出 P 波震相, M2 方法模拟波场与参考波场的空间分布 (M3 方法模拟结果) 具有高度相似性。从震源 S2 激发的地震波场在接收器 R1 和 R2 处合成波形 (图 8) 可看出, M2 方法的合成波形与参考解 (M3 方法模拟结果) 具有较好的一致性, 且波形模拟精度较高, 相对误差较小 (相对误差最大值约为 4%) (图 8b)。因此, 地震矩张量震源 (点源) 激发的地震波场, 使用 M2 方法可得到精度较高的模拟结果。

3.3 非规则网格离散模型中的地震波模拟

为了测试当震源位于非规则网格时使用 M2 方法模拟地震波场的可行性, 本组算例构建了如图 9 所示的非规则网格模型, 实际单元尺寸约为 20 m, 为了直观地展示该模型, 图中单元尺寸放大 2 倍,

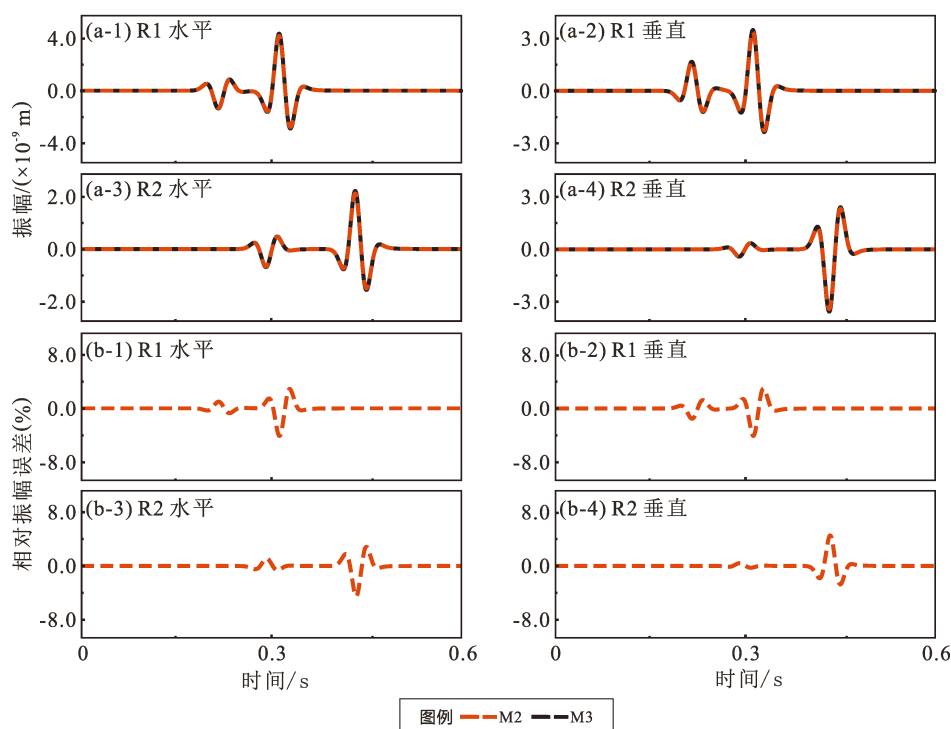


图6 震源为S1时,接收器R1、R2的SEM合成波形与参考波形(a)以及两者的相对误差(b)

Fig. 6 The SEM synthetic and analytical waveforms of the Source 1 – excited waveforms received by Receiver 1 and Receiver 2 (a) and their relative errors (b)

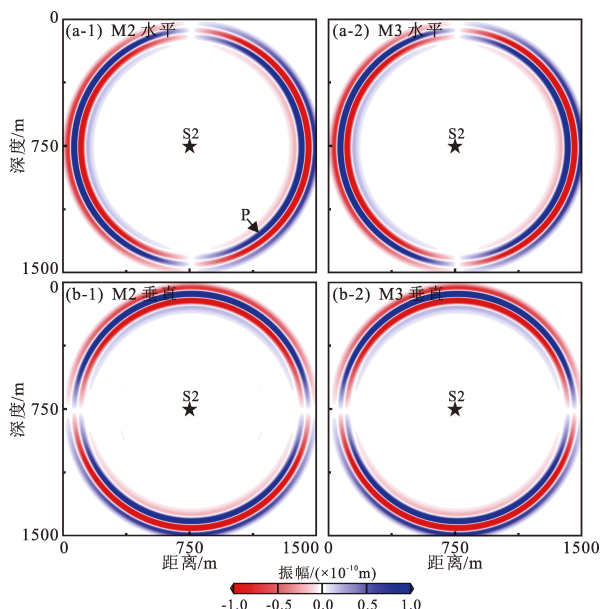


图7 $t=0.4$ s时,使用M2、M3方法计算得到震源S2激发的地震波场的水平(a)和垂直(b)分量波场快照

Fig. 7 The snapshots of the horizontal (a) and vertical (b) components of the excitation wavefield by Source 2 calculated respectively by M2 and M3 when $t=0.4$ s

图中也展示了模型参数。本组算例震源类型为S1,使用M2方法进行了地震波模拟,为了对比需要,选用M3方法模拟结果作为参考解。

模拟得到的接收器R1、R2记录的地震波合成波形水平和垂直分量如图10所示。图10a显示M2方法的模拟波形与参考波形(M3模拟结果)具有高度的一致性。图10b显示,接收器R1和R2处的合成波形相对误差较小(最大波形误差约4%),说明当模型为非规则网格模型时,使用M2方法可得到精度较高的地震波模拟结果。

3.4 δ 函数离散形式处理震源在FDM中的应用

为了说明 δ 函数离散形式的适用性,本文将2类 δ 函数离散形式进一步应用于FDM。FDM网格间隔为4 m(最短波长网格点数约为16),空间差分近似阶数为8阶。震源类型和模型参数与3.1节相同。

使用FDM模拟得到的合成波形如图11a所示,图中显示使用M1和M2方法模拟得到的合成波形与解析波形具有较高的一致性。为了进一步对比2种方法的模拟结果精度,本文给出了接收器R1、R2

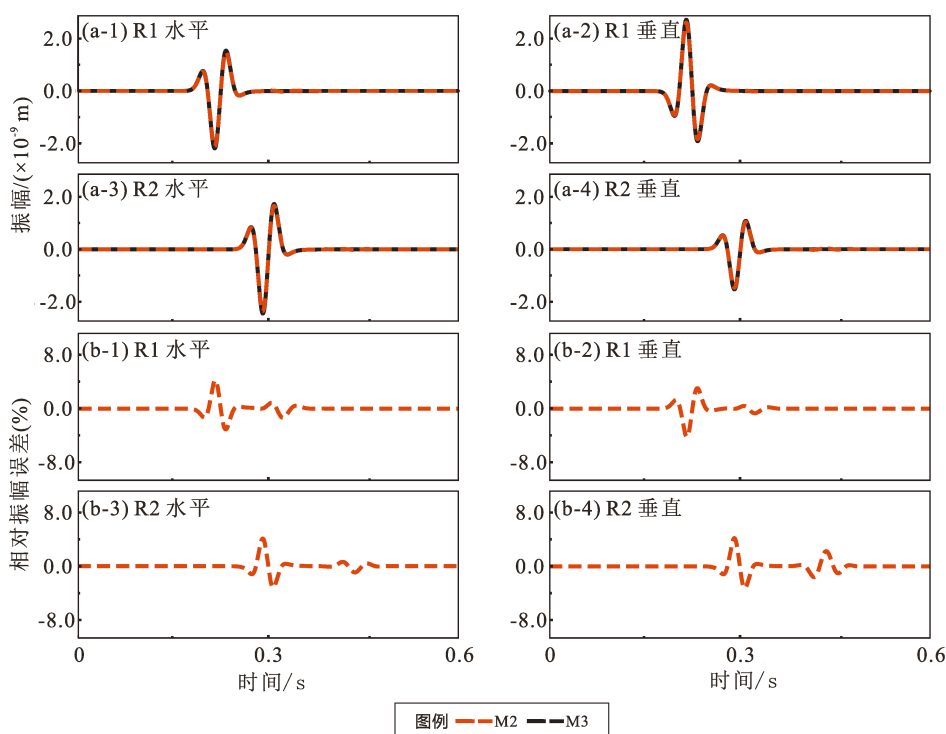


图 8 震源为 S2 时, 接收器 R1、R2 记录的 SEM 合成波形与参考波形 (a) 以及两者的相对误差 (b)

Fig. 8 The SEM synthetic and analytical waveforms of the Source 2 – excited waveforms received by Receiver 1 and Receiver 2 (a) and their relative errors (b)

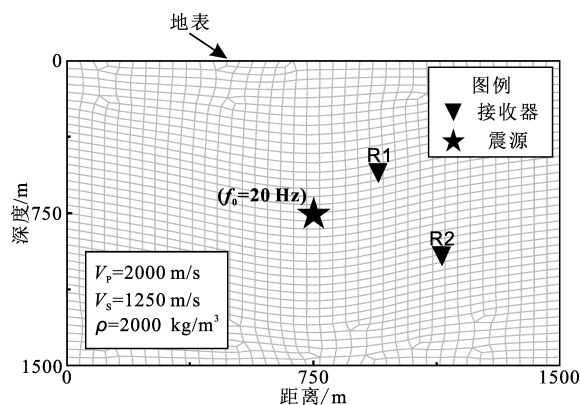


图 9 非规则网格模型示意图

Fig. 9 Schematic diagram of the irregular grid model

的 FDM 合成波形相对误差。图 11b 显示 M2 方法的模拟结果具有较高的精度 (最大波形误差约为 5%), 但 M1 方法的模拟结果精度相对较低 (最大波形误差约为 8%)。说明在使用 FDM 开展地震波模拟时, 使用 M2 方法处理震源可得到精度较高的模拟结果。

综上, SEM 和 FDM 均可使用 M2 方法处理点震源, 说明 M2 方法不仅模拟精度高、适用性还广。

4 结论

在数值模拟地震波传播时需要将震源项进行离散处理, 震源函数的数学表达式通常包含 δ 函数, 本文通过引入 δ 函数的离散形式可近似震源项。为了检验这种震源处理方式在 SEM 地震波模拟中的适用性, 本文开展了多组数值算例进行检验。

数值算例表明, 在 SEM 地震波模拟中使用 δ 函数的离散形式处理震源项可以得到精度较高的模拟结果。这种震源处理方式不仅适用于单极震源和矩张量震源, 而且可以应用到非规则网格模型中的震源处理。本文提出的第二类 δ 函数离散形式模拟结果精度要高于第一类 δ 函数离散形式。此外, 第二类 δ 函数离散形式不仅适用于 SEM, 也适用于其他数值模拟方法, 例如 FDM。

应该指出的是, δ 函数离散形式也可用于有限破裂面条件下的震源近似。通过将有限破裂面离散成多个点源, 然后采用 δ 函数离散形式近似各个点源, 即可实现有限破裂面情形下的地震波场模拟。

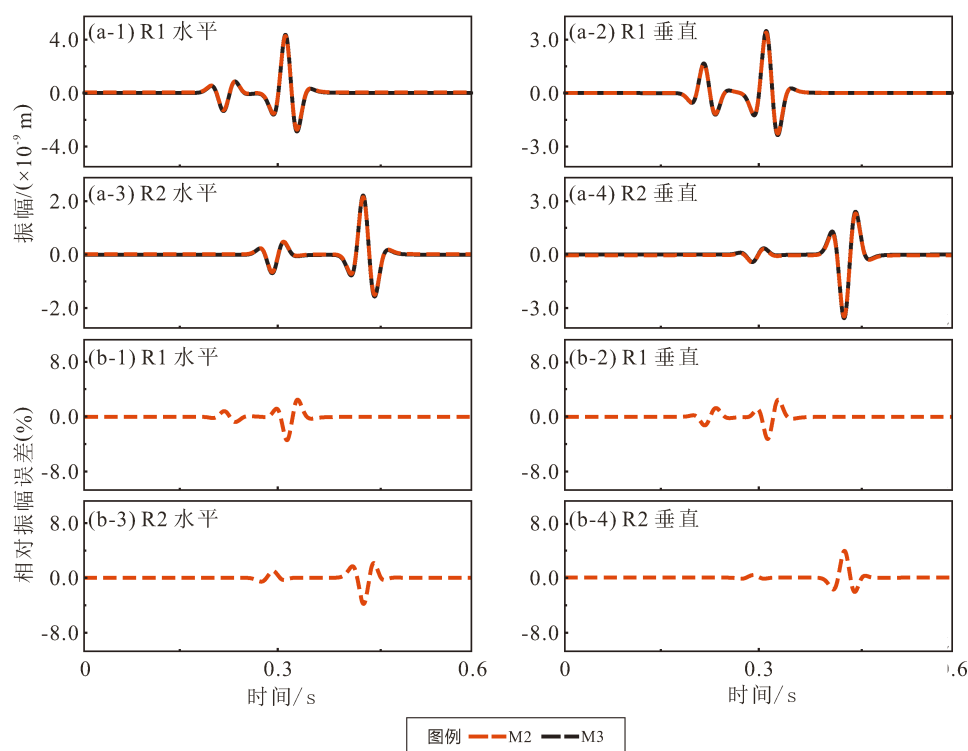


图 10 非均匀网格模型中接收器 R1、R2 的 SEM 合成波形与参考波形 (a) 以及两者的相对误差 (b)

Fig. 10 The SEM synthetic and analytical waveforms of the original waveforms received by Receiver 1 and Receiver 2 (a) and their relative errors (b) in the irregular grid model

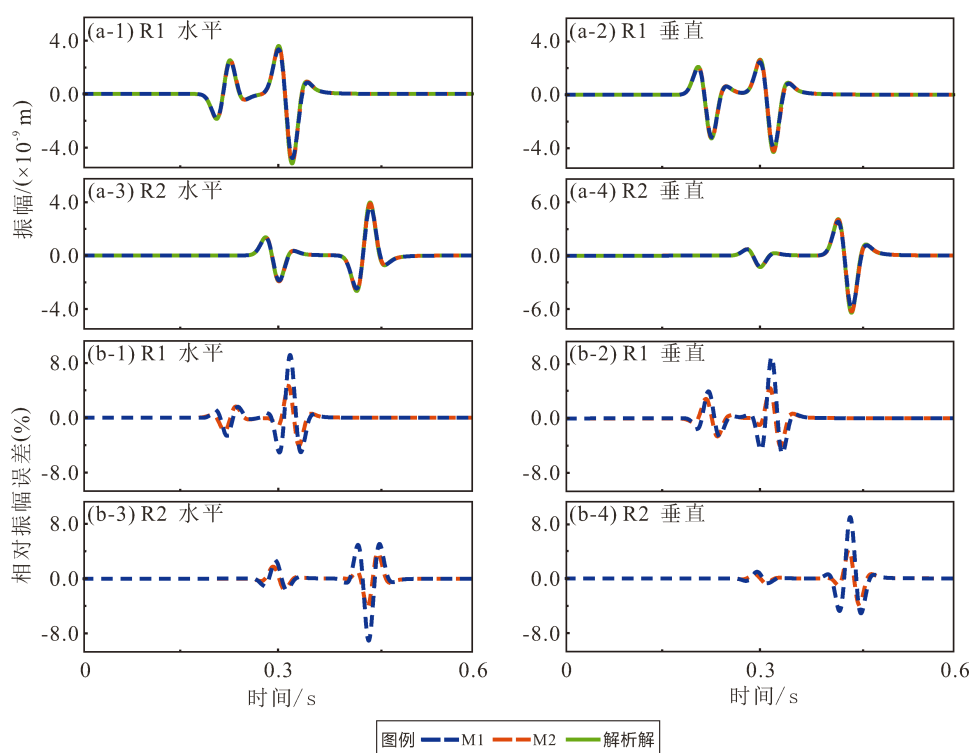


图 11 接收器 R1、R2 的 FDM 合成波形与解析波形对比 (a) 以及两者的相对误差 (b)

Fig. 11 The FDM synthetic and analytical waveforms of the original waveforms received by Receiver 1 and Receiver 2 (a) and their relative errors (b)

附录 A

式 (8) 中的矩阵和向量的具体形式为 (Komatitsch, Tromp, 1999, 2002; 刘少林等, 2021):

单元质量矩阵 \mathbf{M}^e :

$$\mathbf{M}^e = \text{diag}(\omega^a \omega^b J_e^{ab}; \omega^a \omega^b J_e^{ab}) \quad (\text{A1})$$

式中: ω 表示 GLL 积分权; a, b 表示单元 GLL 积分点的索引; J_e^{ab} 为单元雅可比矩阵在数值积分点 (ξ_1^a, ξ_2^b) 处行列式的值。

单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 可表示为:

$$\mathbf{K}^e = [\mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_2^e] \quad (\text{A2})$$

$$\text{式中: } \mathbf{K}_1^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{K}_1 = [l'_a(\xi_1^b) \omega^b] \otimes \text{diag}(\omega^a)$$

$$\mathbf{K}_2 = \text{diag}(\omega^a) \otimes [l'_a(\xi_1^b) \omega^b]$$

式中: \otimes 为矩张量积运算符 (Seriani, 1997)。

向量 \mathbf{P}^e 为:

$$\mathbf{P}^e = [\mathbf{P}_1^e + \mathbf{P}_2^e]^T \quad (\text{A4})$$

$$\text{式中: } \mathbf{P}_1^e = [W_{e,11}^{ab} J_e^{ab} + W_{e,12}^{ab} J_e^{ab}]^T$$

$$\mathbf{P}_2^e = [W_{e,21}^{ab} J_e^{ab} + W_{e,22}^{ab} J_e^{ab}]^T$$

$$W_{e,ik}^{ab} = \frac{\partial \xi_k(\xi_1^a, \xi_2^b)}{\partial x_j} T_{e,ij}^{ab}$$

$$T_{e,ij}^{ab} = c_{ijkl} \frac{\partial u_{e,x_k}^{ab}}{\partial x_i} \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial u_{e,x_i}^{ab}}{\partial x_j} \approx \frac{\partial \xi_1(\xi_1^a, \xi_2^b)}{\partial x_j} \left[\sum_{\alpha=0}^M u_{e,x_i}^{ab} l'_\alpha(\xi_1^a) \right] +$$

$$\frac{\partial \xi_2(\xi_1^a, \xi_2^b)}{\partial x_j} \left[\sum_{\beta=0}^M u_{e,x_i}^{ab} l'_\beta(\xi_2^b) \right]$$

式中: c_{ijkl} 为弹性张量; α, β 表示单元 GLL 积分点的索引。

M3 震源处理方法。通过散度定理和 δ 函数积分的积分性质可得:

$$\int_{\Omega} -\mathbf{M} : \mathbf{w} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d}) S(t) d^2 \mathbf{x} \approx S(t) \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha, \beta=0}^M \mathbf{w}_{i,e_d}^{\alpha, \beta} \begin{bmatrix} l'_\alpha(\xi_1^d) l'_\beta(\xi_2^d) G_{i1} + \\ l'_\alpha(\xi_1^d) l'_\beta(\xi_1^d) G_{i2} \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

式中: e_d 为震源所在单元; \mathbf{G} 的表达式为:

$$\mathbf{G}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{M}_{ik} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x_k} \quad (\text{A7})$$

式中: \mathbf{w} 为任意测试向量, 根据 \mathbf{w} 的任意性可得震源项的离散表达式为:

$$\mathbf{F}^e = \begin{cases} \begin{bmatrix} l'_\alpha(\xi_1^d) l'_\beta(\xi_2^d) G_{11} + l'_\alpha(\xi_1^d) l'_\beta(\xi_2^d) G_{12} \\ l'_\alpha(\xi_1^d) l'_\beta(\xi_2^d) G_{21} + l'_\alpha(\xi_1^d) l'_\beta(\xi_2^d) G_{22} \end{bmatrix} & (e = e_d) \\ 0 & (e \neq e_d) \end{cases} \quad (\text{A8})$$

式 (A8) 即为式 (9) 的另一种离散形式。

参考文献:

- 李冰非, 董兴朋, 李小凡, 等. 2019. 基于辛-谱元-FK 混合方法的保结构远震波场模拟[J]. 地球物理学报, 62(11): 4339-4352.
- Li B F, Dong X P, Li X F, et al. 2019. Structure-preserving modeling of teleseismic wavefield using symplectic SEM-FK hybrid method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 62(11): 4339-4352. (in Chinese)
- 刘璐, 刘洪, 刘红伟. 2013. 优化 15 点频率-空间域有限差分正演模拟[J]. 地球物理学报, 56(2): 644-652.
- Liu L, Liu H, Liu H W. 2013. Optimal 15-point finite difference forward modeling in frequency-space domain[J]. Chinese Journal of Geophysics, 56(2): 644-652. (in Chinese)
- 刘少林, 杨顶辉, 徐锡伟, 等. 2021. 模拟地震波传播的三维逐元并行谱元法[J]. 地球物理学报, 64(3): 993-1005.
- Liu S L, Yang D H, Xu X W, et al. 2021. Three-dimensional element-by-element parallel spectral-element method for seismic wave modeling[J]. Chinese Journal of Geophysics, 64(3): 993-1005. (in Chinese)
- 刘玉柱, 黄鑫泉, 万先武, 等. 2019. 各向异性介质弹性波多参数全波形反演[J]. 地球物理学报, 62(5): 1809-1823.
- Liu Y Z, Huang X Q, Wan X W, et al. 2019. Elastic multi-parameter full-waveform inversion for anisotropic media[J]. Chinese Journal of Geophysics, 62(5): 1809-1823. (in Chinese)
- 孟雪莉, 刘少林, 杨顶辉, 等. 2022. 基于优化数值积分的谱元法模拟地震波传播[J]. 石油地球物理勘探, 57(3): 602-612.
- Meng X L, Liu S L, Yang D H, et al. 2022. Spectral-element method based on optimal numerical integration for seismic waveform modeling[J].

- Oil Geophysical Prospecting, 57(3):602–612. (in Chinese)
- 王光文, 卢占武, 李文辉, 等. 2023. 深地震反射剖面探测技术发展现状[J]. 地球与行星物理论评, 54(2):120–139.
- Wang G W, Lu Z W, Li W H, *et al.* 2023. Development status of deep seismic reflection profile detection technology[J]. Reviews of Geophysics and Planetary Physics, 54(2):120–139. (in Chinese)
- 杨尚倍, 白超英, 周兵. 2018. 起伏地表下基于改进 BISQ 模型双相介质中曲线网格有限差分法波场模拟[J]. 地球物理学报, 61(8):3356–3373.
- Yang S B, Bai C Y, Zhou B. 2018. Wavefield modeling in two-phase media including undulated topography based on reformulated BISQ model by Curvilinear Grid FD method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 61(8):3356–3373. (in Chinese)
- Bielak J, Ghattas O, Kim E J. 2005. Parallel octree-based finite element method for large-scale earthquake ground motion simulation[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 10(2):99.
- Chen Z Y, Wu T T, Yang H Q. 2011. An optimal 25-point finite difference scheme for the Helmholtz equation with PML[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 236(6):1240–1258.
- Cho Y C, Gibson R L. 2019. Reverse time migration via frequency-adaptive multiscale spatial grids[J]. Geophysics, 84(2):S41–S55.
- De Hoop A. 1959. The surface line source problem[J]. Applied Scientific Research, 8(4):349–256.
- Feng Z C, Schuster G T. 2017. Elastic least-squares reverse time migration[J]. Geophysics, 82(2):S143–S157.
- Herrmann R. 1979. SH-wave generation by dislocation sources—a numerical study[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 69(1):1–15.
- Hicks G. 2002. Arbitrary source and receiver positioning in finite-difference schemes using Kaiser windowed sinc functions[J]. Geophysics, 67(1):156–166.
- Jung J H. 2009. A note on the spectral collocation approximation of some differential equations with singular source terms[J]. Journal of Scientific Computing, 39:49–66.
- Komatitsch D, Tromp J. 1999. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation[J]. Geophysical Journal International, 139(3):806–822.
- Komatitsch D, Tromp J. 2002. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation—I[J]. Validation, Geophysical Journal International, 149(2):390–412.
- Lay T. 1992. Seismology, theoretical[M]//Nierenberg W A. Encyclopedia of earth system science (Volume 4); San Diego: Academic Press, inc. Harcourt Brace jovanovich, Publishers, 153–174.
- Lei W, Liu Y T, Li G, *et al.* 2023. 2D frequency-domain finite-difference acoustic wave modeling using optimized perfectly matched layers[J]. Geophysics, 88(2):F1–F13.
- Lin Y Z, van Leeuwen T, Liu H S, *et al.* 2023. A fast wavefield reconstruction inversion solution in the frequency domain[J]. Geophysics, 88(3):R257–R267.
- Liu S L, Li X F, Wang W S, *et al.* 2014. A mixed-grid finite element method with PML absorbing boundary conditions for seismic wave modelling[J]. Journal of Geophysics and Engineering, 11(5):055009.
- Lyu C, Capdeville Y, Zhao L. 2020. Efficiency of the spectral element method with very high polynomial degree to solve the elastic wave equation[J]. Geophysics, 85(1):T33–T43.
- Mazzieri I, Stupazzini M, Guidotti R, *et al.* 2013. SPEED: Spectral elements in Elastodynamics with discontinuous galerkin: A non-conforming approach for 3D multi-scale problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 95(12):991–1010.
- Seriani G. 1997. A parallel spectral element method for acoustic wave modeling[J]. Journal of Computational Acoustics, 5(1):53–69.
- Shen W H, Yang D H, Xu X W, *et al.* 2022. 3D simulation of ground motion for the 2015 M_w 7.8 Gorkha earthquake, Nepal, based on the spectral element method[J]. Natural Hazards, 112(3):2853–2871.
- Tape C, Liu Q, Maggi A, *et al.* 2010. Seismic tomography of the southern California crust based on spectral-element and adjoint methods[J]. Geophysical Journal International, 180(1):433–462.
- Tong P, Komatitsch D, Tseng T L, *et al.* 2014. A 3-D spectral-element and frequency-wave number hybrid method for high-resolution seismic array imaging[J]. Geophysical Research Letters, 41(20):7025–7034.
- Tromp J, Komatitsch D, Liu Q. 2008. Spectral-element and adjoint methods in seismology[J]. Communications in Computational Physics, 3(1):1–32.
- Tromp J, Tape C, Liu Q. 2005. Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels[J]. Geophysical Journal International, 160(1):195–216.
- Yao G, da Silva N V, Debens H A, *et al.* 2018. Accurate seabed modeling using finite difference methods[J]. Computational Geosciences, 22:469–484.
- Yi J, Liu Y K, Yang Z Q, *et al.* 2019. A least-squares correlation-based full traveltimes inversion for shallow subsurface velocity reconstruction[J]. Geophysics, 84(4):R613–R624.
- Zang N, Zhang W, Chen X F. 2021. An overset-grid finite-difference algorithm for simulating elastic wave propagation in media with complex free-surface topography[J]. Geophysics, 86(4):T277–T292.

The Approximation Approaches for Seismic Point Sources with Spectral Element Method When Simulating Seismic Wavefields

LI Mengyang^{1,2}, LIU Shaolin², YANG Dinghui³, LI Xiaofan⁴

(1. *College of Earth and Planetary Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

(2. *National Institute of Natural Hazards, Ministry of Emergency Management of China, Beijing 100085, China*)

(3. *Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(4. *Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, Hubei, China*)

Abstract

When solving the seismic wave equation with the spectral element method, it is necessary to discretize the equation. However, due to the presence of the δ function in the source term, which is a singular function, achieving accurate numerical approximation poses certain challenges. Therefore, special techniques are required to handle the source term. Two types of discrete forms of delta function are introduced in this paper. Using the spectral element method for numerical solution of seismic wave propagation, the discretized form of the source term is presented in detail. To validate the effectiveness of this source treatment approach, several numerical experiments were conducted. Firstly, the discrete form of the δ function was simulated for handling single-force and moment tensor sources on regular grid models. Secondly, the discrete form of the δ function was simulated for handling seismic point sources on an irregular grid model. The numerical experiments demonstrate that when simulating seismic wave propagation with the spectral element method, approximating the point source term with the discrete form of delta function can help to obtain high-precision results from numerical simulation.

Keywords: the spectral element method; seismic wave function; numerical simulation; δ function